付録１　人には聞けない線形代数の基礎

大和田拓
京都大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻

はじめの言葉

線形代数は大学の初年度に習う数学の基礎科目の１つだから易しいはずである．確かに大学では，行列式，逆行列，そして固有値の計算ができる人が毎年量産されている．大学の数学教育の輝かしい成果に水を差すようで恐縮だが，線形代数の単位を取得したばかりの人に，例えば$\mathbb{R}^N$の次元がNである理由を聞いて，高い正答率が期待できるだろうか？連立一次方程式が解る人ならその答えは当たり前のはずなのだが．

当たり前には，説明が十分可能なものと，誰もその理由を答えることができないものがある．当たり前で済ませたツケが早い段階で回ってくるものと，なかなか回ってこないものという分類の仕方もあろう．線形代数における当たり前は上記いずれの分類でも前者に属し，例えば光の二重性のような物理学における深遠な当たり前はいずれにおいても後者に属するだろう．線形代数における当たり前を本物の当たり前にすることは理系の人にとって実利に適うが，その作業は決して楽ではない．証明しようとして思わず手が止まってしまったり，ある基礎事項から導かれた定理を使ってその基礎事項を証明したつもりになるのはよくあることだ．しかしなんといっても線形代数は解ってないのに解ったつもりになりやすく，そうならないようするのが最も難しい．

この付録は理工系の科目や経済学を勉強する人なら誰でも知っておくべき線形代数の基礎の基礎を納得してもらうための補助教材である．実ユークリッド空間のベクトルを対象にし，行列積，線形独立，そして標準基底という初歩の初歩の知識を出発点とするので，その内容はとても人には聞けないものばかりだ．その代わり定理・証明の無機質な羅列ではなく，冗長となるのを覚悟の上でしつこい説明を心がけた．従ってこの付録では，「明らか」，「自明」，「容易だから省略」という数学が得意な人が好む便利な呪文を一切聞くことはない．もちろん読者に証明等を任せるところもあるが，これはあくまで教育的な配慮からである．浅学非才の筆者が書いたこの付録が，もし線形代数に対して後ろめたい気持ちを抱く読者のお役に立つのであれば，それは存外の喜びである．

Lesson 1 行列積

第一回目の Lesson では，行列同士の掛算，行列積，について確認する．ウォーミングアップのつもりで読んでほしい．

$\boldsymbol{A}$をm行n列の行列とする．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$の左側からはr行m列の行列$\boldsymbol{L}$を掛けることができる．その結果，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{LA}$ はr行n列の行列となる．これはr行~~m列~~×~~m行~~n列＝r行n列のように覚えた読者も多いだろう．$\boldsymbol{A}$の右側からはn行r列の行列$\boldsymbol{R}$を掛けることができる．$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{AR}$は$m$行~~$n$列~~×~~$n$行~~$r$列＝$m$行$r$列の行列である．

$\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{R}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$のi行j列の成分を$\boldsymbol{A}$の成分と同様にそれぞれL_{ij}，R_{ij}，C_{ij}，D_{ij}と表すと，行列$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{LA}$および$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{AR}$の成分は次式で定義される．

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{m} L_{ik} a_{kj}\,, \qquad D_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} R_{kj}\,.$$

上の行列の成分の定義より，行列積の線形性

$$\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{B} + \beta\boldsymbol{C}) = \alpha\boldsymbol{AB} + \beta\boldsymbol{AC}, \qquad (\alpha\boldsymbol{B} + \beta\boldsymbol{C})\boldsymbol{A} = \alpha\boldsymbol{BA} + \beta\boldsymbol{CA},$$

が従う[1]．また結合則$(\boldsymbol{LA})\boldsymbol{R} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{AR})$も二重総和の順序を入れ替えることで示せる．行列積の計算プログラムを書くには上の定義で十分であるが，線形代数を見通しよく理解するには，このような機械的で無機質な定義の他に，行ベクトルや列ベクトルに対する操作として行列積を捉えることが必要になる．

行列$\boldsymbol{A}$はn個の列ベクトルの並びと見なすことができる．すなわち

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}^{(1)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{a}^{(n)}),$$

[1] $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$は行列で，$\alpha$および$\beta$はスカラーである．行列のスカラー倍や行列の和等の細かい定義は省略したが，誤解は生じないであろう．

ここに$\boldsymbol{a}^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$である$(j = 1, \cdots, n)$.

(i) 行列積$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{LA}$は

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{LA} = (\boldsymbol{La}^{(1)} \quad \cdots \quad \boldsymbol{La}^{(n)}), \tag{1-1}$$

と表すことができる．つまり$\boldsymbol{A}$の左側から行列$\boldsymbol{L}$を掛けることは，$\boldsymbol{A}$の各列ベクトルに行列$\boldsymbol{L}$を左から掛けるのと同じである．

<u>例 1</u>　$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$とすると, $\boldsymbol{LA} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$であるが，これは$\boldsymbol{L}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$と$\boldsymbol{L}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$を並べたものである．

(ii) 行列積$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{AR}$の各列ベクトルは$\boldsymbol{A}$の列ベクトルの線形結合で表される．すなわち,

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{AR} = \left(\sum_{k=1}^{n} R_{k1} \boldsymbol{a}^{(k)} \quad \cdots \quad \sum_{k=1}^{n} R_{kr} \boldsymbol{a}^{(k)} \right). \tag{1-2}$$

<u>例 2</u>　$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$とすると，　$\boldsymbol{Ax} = x_1 \boldsymbol{a}^{(1)} + \cdots + x_n \boldsymbol{a}^{(n)}$.

<u>例 3</u>　$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} \\ \vdots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} \end{pmatrix}$とすると，　$\boldsymbol{AR} = \left(R_{11}\boldsymbol{a}^{(1)} + \cdots + R_{n1}\boldsymbol{a}^{(n)}, R_{12}\boldsymbol{a}^{(1)} + \cdots + R_{n2}\boldsymbol{a}^{(n)} \right)$.

行列$\boldsymbol{A}$はm個の行ベクトルの並びと見なすこともできる．

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}^{(1)} \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}^{(m)} \end{pmatrix},$$

ここに$\widetilde{\boldsymbol{a}}^{(i)} = (a_{i1}, \cdots, a_{in})$ $(i = 1, \cdots, m)$. $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{LA}$の各行ベクトルは$\boldsymbol{A}$の行ベクトルの線形結合で表される．すなわち

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{LA} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} L_{1k}\widetilde{\boldsymbol{a}}^{(k)} \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{m} L_{rk}\widetilde{\boldsymbol{a}}^{(k)} \end{pmatrix}. \qquad (1-3)$$

<u>例 4</u>　$\boldsymbol{L} = (x_1, \cdots, x_m)$とすると，

$$\boldsymbol{LA} = x_1\widetilde{\boldsymbol{a}}^{(1)} + \cdots + x_m\widetilde{\boldsymbol{a}}^{(m)}.$$

<u>例 5</u>　$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1m} \\ L_{21} & \cdots & L_{2m} \end{pmatrix}$とすると，

$$\boldsymbol{LA} = \begin{pmatrix} L_{11}\widetilde{\boldsymbol{a}}^{(1)} + \cdots + L_{1m}\widetilde{\boldsymbol{a}}^{(m)} \\ L_{21}\widetilde{\boldsymbol{a}}^{(1)} + \cdots + L_{2m}\widetilde{\boldsymbol{a}}^{(m)} \end{pmatrix}.$$

(iv)　$\boldsymbol{AR}$は

$$\boldsymbol{AR} = \begin{pmatrix} \widetilde{\boldsymbol{a}}^{(1)}\boldsymbol{R} \\ \vdots \\ \widetilde{\boldsymbol{a}}^{(m)}\boldsymbol{R} \end{pmatrix}, \qquad (1-4)$$

と表せる．すなわち$\boldsymbol{A}$の右側から行列$\boldsymbol{R}$を掛けることは，$\boldsymbol{A}$の各行ベクトルに行列$\boldsymbol{R}$を右から掛けることと同じ．

<u>例 6</u>　$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$とすると，$\boldsymbol{AR} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$であるが，これは
$(1 \quad 0 \quad 1)\boldsymbol{R} = (4 \quad 10)$と$(0 \quad 1 \quad 0)\boldsymbol{R} = (2 \quad 5)$を縦に並べたものである．

なお，行列積の転置のよく知られた公式

$$(\boldsymbol{AR})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$

は式(1−2)および(1−3)より得られる．確認は読者に任せる．

Lesson 2 線形独立と線形従属

ベクトル$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,m)$ の線形結合がゼロベクトルになるのは, その係数が全てゼロの場合に限られるとき，すなわち

$$a_1\boldsymbol{x}^{(1)}+a_2\boldsymbol{x}^{(2)}+\cdots+a_m\boldsymbol{x}^{(m)}=\boldsymbol{0} \implies a_1=a_2=\cdots=a_m=0,$$

これらのベクトルを線形独立(あるいは一次独立)という．線形独立なベクトルにはゼロベクトルが含まれないことに注意しよう(ゼロベクトルにどんな数を掛けてもゼロベクトルだから).

ベクトル$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,m)$が線形独立でないとき，これらのベクトルを線形従属（あるいは一次従属）という．すなわち線形従属なベクトル$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,m)$に対し

$$a_1\boldsymbol{x}^{(1)}+a_2\boldsymbol{x}^{(2)}+\cdots+a_m\boldsymbol{x}^{(m)}=\boldsymbol{0},$$

を満たすゼロベクトルでない係数ベクトル$\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_m)\neq\boldsymbol{0}$が必ず存在する．$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,m)$が線形従属なら， $a_p\neq 0$なる添え字pに対するベクトル$\boldsymbol{x}^{(p)}$は

$$\boldsymbol{x}^{(p)}=-\frac{1}{a_p}\left(a_1\boldsymbol{x}^{(1)}+\cdots+a_{p-1}\boldsymbol{x}^{(p-1)}+a_{p+1}\boldsymbol{x}^{(p+1)}+\cdots+a_m\boldsymbol{x}^{(m)}\right), \qquad (2-1)$$

のように, 自分以外のベクトル$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i\neq p)$の線形結合によって表される（$\boldsymbol{x}^{(p)}=\boldsymbol{0}$もこの場合に含まれる)．

以下の当たり前の事実の確認は読者に任せる．

(i) 線形独立なベクトル$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,m)$から選ばれたp個$(1\leq p<m)$のベクトルも線形独立である．(背理法で考えよ)

(ii) $\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,m)$が線形従属の場合には，選ばれたp個のベクトルは線形従属(あるいは線形独立)とは限らない．(実例を挙げよ)

(iii) $\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,m)$の中に少なくとも一つはゼロベクトルでないものがあれば，これらのベクトルには線形独立なベクトルが必ず含まれる．(最も簡単な場合は？)

Lesson 3 部分空間，張る空間(線形包)

おことわり

$\mathbb{R}^N$の元の和や定数倍の定義および$\mathbb{R}^N$が線形空間(ベクトル空間)であること(つまり交換則や結合則，零元や逆元の存在といった公理を満たすこと)の確認はこの付録では省略する．

定義　$\mathbb{R}^N$の部分空間

$\mathbb{R}^N$の部分集合$\boldsymbol{X}$が$\mathbb{R}^N$の線形演算に対して閉じているならば，$\boldsymbol{X}$を$\mathbb{R}^N$の部分空間と呼ぶ．すなわち任意の$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{X}$，任意の$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$に対して，$\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}\in\boldsymbol{X}$が成り立つ．

例１：直線$x+y=0$上の点の位置ベクトルの集合は$\mathbb{R}^2$の部分空間．

例２：平面$x+y+z=0$上の点の位置ベクトルの集合は$\mathbb{R}^3$の部分空間．

例３(反例)：平面$x+y+z=1$上の点の位置ベクトルの集合は$\mathbb{R}^3$の部分空間ではない．

定義　張る空間（線形包）

$\mathbb{R}^N$のベクトル$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$の線形結合によって生成されるベクトルの集合は$\mathbb{R}^N$の部分空間である．これは$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$が線形独立であろうがなかろうが関係ない(確認は読者に任せる)．この部分空間を$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$の張る空間，あるいは$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$の線形包と呼び，この付録では$\mathrm{span}(\boldsymbol{x}^{(i)},i=1,\cdots,n)$あるいは$\mathrm{span}(\boldsymbol{x}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(n)})$と表すことにする．

$\mathrm{span}(\boldsymbol{x}^{(i)},i=1,\cdots,n)$に関する 2 つの性質を紹介しよう．

(i) $\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$は線形独立で$\boldsymbol{y}\notin\mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(i)},i=1,\cdots,n\right)$とすると，$\boldsymbol{y}$と$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$は線形独立である．

∵ 背理法で証明する．$\boldsymbol{y}$と$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$が線形従属とすると，

$$a_0\boldsymbol{y}+a_1\boldsymbol{x}^{(1)}+\cdots+a_n\boldsymbol{x}^{(n)}=\boldsymbol{0},$$

を満たす$n+1$成分の係数ベクトル$(a_0,\cdots,a_n)\neq\boldsymbol{0}$が存在する．$a_0\neq 0$ならば$\boldsymbol{y}\notin\mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(i)},i=1,\cdots,n\right)$に矛盾するから$a_0=0$．すると

$$a_1\boldsymbol{x}^{(1)}+\cdots+a_n\boldsymbol{x}^{(n)}=\boldsymbol{0},\qquad (a_1,\cdots,a_n)\neq\boldsymbol{0},$$

となって$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$が線形独立であることに矛盾する．■

(ii) $\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$の中で少なくとも一つはゼロベクトルではないとする．
$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$に含まれる線形独立なベクトルの最大個数を$r(\geq 1)$とし，r個の線形独立なベクトルを$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s=1,\cdots,r)$とすると

$$\mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(i)}, i=1,\cdots,n\right)=\mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(i_s)}, s=1,\cdots,r\right). \qquad (3-1)$$

∵ 二つの空間$\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{Y}$が等しいとは，$\boldsymbol{X}$の任意の要素が$\boldsymbol{Y}$にも属し，$\boldsymbol{Y}$の任意の要素が$\boldsymbol{X}$にも属するという２点を満たすことである．式(３－１)を言うには

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(i)}, i=1,\cdots,n\right) \rightarrow \boldsymbol{x} \in \mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(i_s)}, s=1,\cdots,r\right), \qquad (3-2)$$

および

$$x \in \mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(i)}, i=1,\cdots,n\right) \leftarrow \forall x \in \mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(i_s)}, s=1,\cdots,r\right), \qquad (3-3)$$

を示せばよい．条件より$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$から$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s=1,\cdots,r)$を除いた$n-r$個のベクトルはそれぞれ$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s=1,\cdots,r)$の線形結合で表される．そうでなければ線形独立なベクトルの個数がrよりも大きくなるからである(上の性質(i))．ベクトル$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$の線形結合で表される任意のベクトル$\boldsymbol{x}$は，$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s=1,\cdots,r)$の線形結合とそれ以外のベクトルの線形結合の和で表されるが，後者は$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s=1,\cdots,r)$の線形結合で表されるから，式(３－２)が成り立つ．一方$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s=1,\cdots,r)$の線形結合は$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$の線形結合でもある．よって式(３－３)が成り立つ．

線形代数の落とし穴

読者はここまで順調に読み進んできたと思うので，そろそろ線形代数の落とし穴のお話をしてもよい頃合いだろう．読者がもし上の(i)および(ii)の説明を読んで本当によく分かったと思うなら筆者はとても愉しい．しかしそれは筆者の拙い説明でもよく分かってもらったからではない．

線形代数に限らず数学の表現は簡潔さを良しとするので，定理はさらっとした文章で記述される．しかしその内容を額面通りに受け取れば，京都で「ぶぶ漬けどないです」と言われて安心して居座り続ける無粋な客と同じになってしまう．さらっとした所こそ，むしろ「ほんまかいな？」と疑う癖をつけてほしい．A ならば B という形式で定理等は記述されるが，その証明では A が実現するかどうかには言及しない．もちろん「Einstein が宇宙人ならば」といった実現不可能な条件にならないように，定理を作る側は条件の設定に細心の注意を払う(背理法のように実現性のない条件をわざと設定する場合もある)．しかしそれを学ぶ側は定理の証明には注意を払っても，その条件の設定(実現性)に関しては概して無頓着である．

それでは上のspan$(\boldsymbol{x}^{(i)}, i=1,\cdots,n)$に関する 2 つの性質に対する説明を疑いながら読み返してみよう．「(i)の条件$\boldsymbol{y} \notin \mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(i)}, i=1,\cdots,n\right)$を満たすベクトル$\boldsymbol{y}$は本当にあるか？」と自問自答し，「$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$が線形従属な場合，あるいは線形独立でも$n<N$なら有り得る」と答えることができる読者なら，さらに突っ込んで「$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$が線形独立なら, $n \geq N$の場合は何故有り得ないのか？」と自問しなければならない．しかしこれは Lesson 4 の内容だからこの付録ではまだ説明していない．だからよく解ったと感じた読者の多くはよく解ったつもりになっただけなのだ.「$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$に含まれる線形独立なベクトルの最大個数をrとし」は，扱うベクトルが有限個ということで，最大個数は確かにあると納得できるだろう．しかしこれに続く「r個の線形独立なベクトルを
$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s=1,\cdots,r)$とする」には「具体的に$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s=1,\cdots,r)$をどうやって決めるのか？」,「その個数rが最大個数であることをどうやって確かめるのか？」といった疑問が自然に浮かぶはずだ.

最大個数の線形独立なベクトルの求め方として，誰でも思いつくのが次のアルゴリズムだ.

1) $\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$の中で，ゼロベクトルでないものを 1 つ探す．見つけたそれを$\boldsymbol{x}^{(p)}$とすると，$i_1=p$として，$\boldsymbol{x}^{(i_1)}$をn個のベクトル$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i=1,\cdots,n)$のリスト(元リストと呼ぶことにする）から別のリスト(新リストと呼ぶことにする)に移す.

上の操作終了時には，元リストには$n-1$個のベクトルがあり，新リストには$\boldsymbol{x}^{(i_1)}$のベクトルがある．今，元リストには$n-k$個のベクトルがあり，新リストには$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s=1,\cdots,k)$のベクトルがあるとしよう．以下の操作を元リストの要素がなくなるか，途中で終了するまで繰り返す.

2)元リストの$n-k$個のベクトルの中で$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s=1,\cdots,k)$の線形結合(係数はゼロを含む)で表されないものを 1 つ探し, なければ$r=k$として終了し, 見つければそれを$\boldsymbol{x}^{(p)}$とし, $i_{k+1}=p$として$\boldsymbol{x}^{(i_{k+1})}$を元リストから新リストに移す.

しかし上の説明は駄目である．このアルゴリズムによって, n個のベクトルがr個の線形独立なベクトル$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s=1,\cdots,r)$とそれらの線形結合で表される$n-r$個のベクトルに分けられるのは確かだ．これで求まったベクトル$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s=1,\cdots,r)$が本当に最大個数の場合の線形独立なベクトルかどうかは定かではない．つまり別の方法でrより大きい個数の線形独立なベクトルが見つかる可能性が残っている．その可能性がないことは Lesson 6 でようやく示される．さらに上の手

順 2)で$n-k$個のベクトルの中で$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s=1,\cdots,k)$の線形結合(係数はゼロを含む)で表されないものを具体的にどうやって見つけるのかがはっきりしない．ベクトルの線形独立性の判定方法は Lesson 8 と Lesson11 で紹介する予定だ．上のアルゴリズムで納得した人は, Lesson 6 の内容をすでに自家薬籠中の物にし, さらに線形独立性の判定法も熟知しているか，あるいは単にものわかりが良すぎるかのいずれかである.

筆者が何が言いたいか，ものわかりの良い読者なら，もうお分かりだろう．線形代数は確かに行列やベクトルという有限で具体的なものを扱うが，その性質を議論する際には抽象的にならざるを得ない．抽象論は少しでも曖昧さがあるとたちまち崩壊してしまうので，論理の石橋は叩いて叩きすぎることはない. むしろものわかりが悪くないと，線形代数を解るようにはならないと思うほうが正解だ.

Lesson 4 $\mathbb{R}^N$の基底，次元

この付録では先に述べたように$\mathbb{R}^N$が線形空間であることの確認はしない．その代わり$\mathbb{R}^N$の次元がNという当たり前のことをしつこく説明する．この付録の中で数少ない難しいところの 1 つだ．読者の中にはくどいから読み飛ばそうと思う人も出てくるかもしれない．しかし筆者の苦い経験から言うと，ここを当たり前にするから線形代数が解ったようで解らなくなるのである．

これまでの Lesson では，行列積および，線形独立という二つの基本的な事項を説明した．ここではさらにこの付録のもう一つの柱となる命題を示す．

命題 0

$\mathbb{R}^N$の任意の元はN個の基本ベクトル

$$\boldsymbol{e}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{e}^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{e}^{(N)}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},$$

の線形結合で表せる．すなわち$\mathbb{R}^N=\mathrm{span}\left(\boldsymbol{e}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{e}^{(N)}\right)$．さらにこれら$N$個の基本ベクトルは線形独立である．これが任意の自然数Nに対して成り立つ．[2]

証明は読者に任せる．この命題を本物の当たり前にしてほしい．命題 0 がこの Lesson における議論の命綱になるからだ．以下の命題や定理は，$\mathbb{R}^N$のN個の線形独立なベクトルの性質に関するものであるが，その存在を保証するのが命題 0 である($\mathbb{R}^N$のN個の線形独立なベクトルとして，少なくとも基本ベクトルがある)．基本ベクトルなら成り立つのが当たり前の命題や定理だが，「もし$\mathbb{R}^N$に基本ベクトル以外のN個の線形独立なベクトルがあっても同じことが言えますよ」という内容になっている．そして最後に「ほらっ，確かに基本ベクトル以外にも沢山あることが解るでしょう」という落ちがつく．もちろん，各基本ベクトルを定数倍してできる特殊なものだけではない．このことを念頭に置いて読み進めてほしい．

命題 1

$\mathbb{R}^N$の基本ベクトル$\boldsymbol{e}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{e}^{(N)}$は$N$個の線形独立なベクトルの線形結合で表せる．

[2] $N=1$の場合，$\boldsymbol{e}^{(1)}=(1)$．

基本ベクトルが基本ベクトルの線形結合で表されることには疑問の余地はない．本物の当たり前だ．命題１が言わんとするのは「もし基本ベクトル以外にN個の線形独立なベクトルがあるとしても，同じことが言えますよ」ということなのだ．命題１の証明は後に回すが，これを認めると次の二つが言える．

(i) $\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(N)}$を$\mathbb{R}^N$における$N$個の線形独立なベクトルとすると，

$$\mathbb{R}^N=\mathrm{span}\left(\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(N)}\right).$$

（$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(N)}$が基本ベクトルなら，(i)は命題０から従う．だから当たり前だ．基本ベクトル以外にN個の線形独立なベクトルがあるとしても(i)が成り立つと言いたいのである．）

∵ 命題０より$\mathbb{R}^N$の任意のベクトルは基本ベクトル$\boldsymbol{e}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{e}^{(N)}$の線形結合で表される．さらに命題１より$\boldsymbol{e}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{e}^{(N)}$はそれぞれ$N$個の線形独立なベクトル$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(N)}$の線形結合で表される．従って$\mathbb{R}^N$の任意の要素は$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(N)}$の線形結合で表される．その逆は当たり前だが，$\mathbb{R}^N$が線形空間(線形演算に対して閉じていること)であることから従う．■

(ii) $\mathbb{R}^N$における線形独立なベクトルの最大個数はNである．

∵ $\mathbb{R}^N$には基本ベクトルの個数Nより大きい個数の線形独立なベクトルが存在しないことを示せばよい．数学には悪魔の証明はなく背理法が使える．$\mathbb{R}^N$に$N+1$個の線形独立なベクトル$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(N+m)}$があるとすれば，この中の$N$個，例えば$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(N)}$，は線形独立だから(Lesson 2 (i))，上の(i)より$\mathbb{R}^N$を張る．すると残りの$\boldsymbol{y}^{(N+1)}$も$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(N)}$の線形結合で表されることになる．これは$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(N+1)}$が線形独立であることに矛盾する．■

以上をまとめると

<u>定理１</u>
$\mathbb{R}^N$における線形独立なベクトルの最大個数はNであり，$\mathbb{R}^N$のN個の線形独立なベクトルは$\mathbb{R}^N$を張る．

（$\mathbb{R}^N$には$N+1$個以上の線形独立なベクトルはなく，基本ベクトル以外にN個の線形独立なベクトルの組があっても，そのベクトルは$\mathbb{R}^N$を張る．）

$N=1$の場合は命題１および定理１は成り立つ(確認は読者に任せる)．命題１が

$N=n$に対して成り立てば，定理１も$N=n$に対して成り立つ．これは上の(i)および(ii)で示した通りだ．そこで$N=n$のとき定理１が成り立つと仮定して$N=n+1$に対して命題１が成り立つことが示せれば，定理１および命題１が任意の自然数Nに対して成り立つことになる(帰納法)．この戦略のために次の補題を用意する．

<u>補題１</u>

$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(k)}\in\mathbb{R}^N$は線形独立とする．$\boldsymbol{e}^{(1)}\notin\mathrm{span}\left(\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(k)}\right)$ならば，$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(k)}$の第一成分を取り除いてできるベクトル$\widetilde{\boldsymbol{y}}^{(1)},\cdots,\widetilde{\boldsymbol{y}}^{(k)}\in\mathbb{R}^{N-1}$も線形独立である．

（基本ベクトルで$\boldsymbol{e}^{(1)}$以外のものを$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(k)}\in\mathbb{R}^N$とすれば，補題１は確かに成り立つ. $\boldsymbol{e}^{(1)}$以外の基本ベクトルで第一成分を取り去ったものは$\mathbb{R}^{N-1}$の基本ベクトルになるからだ．$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(k)}\in\mathbb{R}^N$の線形独立なベクトルとしてこれ以外の場合があるとしても，補題１が成り立つと言いたいのである.）

補題１の証明は以下の通りである．

∵ $\widetilde{\boldsymbol{y}}^{(1)},\cdots,\widetilde{\boldsymbol{y}}^{(k)}$が線形従属とすると，$a_1\widetilde{\boldsymbol{y}}^{(1)}+\cdots+a_k\widetilde{\boldsymbol{y}}^{(k)}=\boldsymbol{0}$を満たす係数ベクトル$(a_1,\cdots,a_k)\neq\boldsymbol{0}$が存在する．これは$a_1\boldsymbol{y}^{(1)}+\cdots+a_k\boldsymbol{y}^{(k)}\in\mathbb{R}^N$の第一成分以外がすべてゼロであることを示している．もしその第一成分がゼロならば$a_1\boldsymbol{y}^{(1)}+\cdots+a_k\boldsymbol{y}^{(k)}=\boldsymbol{0}$となって$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(k)}$が線形独立であることに反する．従って第一成分はゼロではない．第一成分をを$c(\neq 0)$とすれば，

$$\boldsymbol{e}^{(1)}=(a_1/c)\boldsymbol{y}^{(1)}+\cdots+(a_k/c)\boldsymbol{y}^{(k)}.$$

すなわち$\boldsymbol{e}^{(1)}\in\mathrm{span}\left(\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(k)}\right)$となり矛盾．■

$\boldsymbol{e}^{(1)}$を$\boldsymbol{e}^{(i)}\ \ (i=2,\cdots,N)$へ，$\widetilde{\boldsymbol{y}}^{(1)},\cdots,\widetilde{\boldsymbol{y}}^{(k)}\in\mathbb{R}^{N-1}$を$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(k)}$の第$i$成分を取り除いてできるベクトルへと変更しても，補題１が成り立つことに注意しよう．

定理１$(N=n)$→命題 1$(N=n+1)$を背理法によって証明する．

∵ $\mathbb{R}^{n+1}$の基本ベクトル$\boldsymbol{e}^{(1)}$が$\mathbb{R}^{n+1}$の$n+1$個の線形独立なベクトル$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(n+1)}$の線形結合で表せないとしよう．すなわち$\boldsymbol{e}^{(1)}\notin\mathrm{span}\left(\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(n+1)}\right)$．すると補題１より第一成分を除いたベクトル$\widetilde{\boldsymbol{y}}^{(1)},\cdots,\widetilde{\boldsymbol{y}}^{(n+1)}\in\mathbb{R}^n$は線形独立となるが，これは$N=n$の場合の定理１に矛盾する（$\mathbb{R}^n$における線形独立なベクトルの個数が$n+1$になってしまう)．従って$\boldsymbol{e}^{(1)}$は$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(n+1)}$の線形結合で表せる. 同様に$\boldsymbol{e}^{(i)}\ (i=2,\cdots,n+1)$も$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(n+1)}$の線形結合で

表せる．すなわち命題１が$N=n+1$に対して成り立つことが示された．■
（$\mathbb{R}^{n+1}$の基本ベクトルは$N=n+1$の場合の命題１を満たす． $\mathbb{R}^{n+1}$に基本ベクトル以外の$n+1$個の線形独立なベクトルがあるとしても，これらのベクトルは$N=n+1$の場合の命題１を満たすということを言いたいのである.）

以上で定理1(および命題1)が任意の自然数Nに対して成り立つことが示された.

定理１より同次連立方程式に関する非常に重要な性質が導かれる．定理１をわざわざ用意したのは実はこのためだったのである.

<u>系１－１</u>
$\boldsymbol{A}$をm行n列の行列とし, $\boldsymbol{x}$をn成分の縦ベクトルとする. 同次連立方程式$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$は$m<n$の場合(方程式の数が未知数の数より少ないとき), 非自明な解($\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$)を持つ.

∵ $\boldsymbol{A}$の列ベクトルを$\boldsymbol{a}^{(j)}$ $(j=1,\cdots,n)$とする．各列ベクトルは$\mathbb{R}^m$の要素だから線形独立な列ベクトルの個数は高々m個である(定理１)．$m<n$ならば列ベクトルの個数は線形独立なベクトルの最大個数を超えるので$\boldsymbol{a}^{(j)}$ $(j=1,\cdots,n)$は線形従属である．一方， $\boldsymbol{x}=\ (x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$とすれば，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$は$x_1\boldsymbol{a}^{(1)}+\cdots+x_n\boldsymbol{a}^{(n)}=\boldsymbol{0}$と表せる(Lesson 1)．すなわち$\boldsymbol{A}$の列ベクトルの全体が線形従属であることは，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$が非自明な解($\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$)を持つことに他ならない．■

この系より Nより少ない個数の線形独立なベクトルは$\mathbb{R}^N$を張れないことが判る.

<u>系１－2</u>
$\mathbb{R}^N$を張る線形独立なベクトルの個数はNに限られる.

∵ N個の基本ベクトル$\left\{\boldsymbol{e}^{(j)}(j=1,\cdots,N)\right\}$は線形独立だから

$$\sum_{j=1}^{N}b_j\boldsymbol{e}^{(j)}=\boldsymbol{0},$$

ならば係数b_j $(j=1,\cdots,N)$は全てゼロでなければならない. もし$\mathbb{R}^N$のm個の線形独立なベクトル$\left\{\boldsymbol{x}^{(j)}(j=1,\cdots,m)\right\}$が$\mathbb{R}^N$を張るならば，$\boldsymbol{e}^{(j)}$は$\boldsymbol{e}^{(j)}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\boldsymbol{x}^{(i)}$と表される．従って，

$$\sum_{j=1}^{N}b_j\boldsymbol{e}^{(j)}=\sum_{j=1}^{N}b_j\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\boldsymbol{x}^{(i)}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}\,b_j\right)\boldsymbol{x}^{(i)}=\boldsymbol{0}.$$

$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(j=1,\cdots,m)$は線形独立だから係数は全てゼロでなければならない.

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij}\, b_j = 0 \ \ (i = 1, \cdots, m).$$

これは未知数がN個，方程式の数がm個の連立方程式である．系 1－1 よりこの連立方程式は$m < N$ならば非自明な解を持つので，$\boldsymbol{e}^{(j)}(j = 1, \cdots, N)$が線形独立であることに矛盾する．従って$m \geq N$でなければならない．一方，定理 1 より$\mathbb{R}^N$における線形独立なベクトルの最大個数は$N$であるから，$\mathbb{R}^N$を張るのは定理 1 が保証する$m = N$の場合に限られる．■

問．線形独立でないN個のベクトルは$\mathbb{R}^N$を張れるのか？

$\mathbb{R}^N$における線形独立なN個のベクトルの一般的な作り方

これまで「$\mathbb{R}^N$に基本ベクトル以外のN個の線形独立なベクトルがあるとすれば」という議論をしてきた．ここではN個の線形独立なベクトルの組の一般的な構成法を説明する．

cおよび$d_i \ (i = 1, \cdots, N)$を任意の定数(ただし$c \neq 0$)とする．$\mathbb{R}^N$には$\boldsymbol{x}^{(1)} \neq \boldsymbol{0}$となるベクトルが無数にある．$N = 1$ならこれで終了．$N > 1$ならこの無数の$\boldsymbol{x}^{(1)}$の候補から 1 つ選ぶ．系 1－2 より$\mathbb{R}^N \neq \mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(1)}\right)$だから$\boldsymbol{a} \notin \mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(1)}\right)$なる $\mathbb{R}^N$のベクトルが少なくとも 1 つ存在する．$c_2\boldsymbol{a} + d_1\boldsymbol{x}^{(1)} \notin \mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(1)}\right)$で，$c$および$d_1$には任意性があるので，$\boldsymbol{x}^{(2)} \notin \mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(1)}\right)$なる$\boldsymbol{x}^{(2)}$の候補は無数に存在する．この中から$\boldsymbol{x}^{(2)}$として 1 つ選ぶと，Lesson 3 (ii)より$\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}$は線形独立である．
$\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}$の選び方には任意性があったので，線形独立な 2 つのベクトルの組は無数に作れる．$N = 2$ならこれで終了．このような操作を繰り返せばN個の線形独立なベクトル$\boldsymbol{x}^{(i)}(i = 1, \cdots, N)$の組を無数に作ることができる．

これでようやくこの Lesson の目的である$\mathbb{R}^N$の基底と次元を定義できるようになった．

定義：$\mathbb{R}^N$の基底と次元

$\mathbb{R}^N$を張るN個の線形独立なベクトルを$\mathbb{R}^N$の基底といい，これらN個のベクトルを基底ベクトルと言う．$\mathbb{R}^N$の次元を基底ベクトルの個数とする(それは系 1－2 よりNである).

当たり前を本物の当たり前にするのは，決して楽ではないのである．これでこの付録の前半のヤマ場は越えた．

Lesson 5 逆行列

筆者もかつてそうであったように，読者の中には逆行列と聞けば行列式を反射的に思い浮かべてしまう人が多いと思う．しかし逆行列の有無は行列式という高級な計算に頼らなくても，列ベクトルや行ベクトルが線形独立か否かという原始的な性質から言えてしまう．

命題２（右逆行列） $\boldsymbol{A}$をn次の正方行列（n行n列の行列)とする．$\boldsymbol{A}$の列ベクトル全体が線形独立ならば，$\boldsymbol{E}$をn次の単位行列として$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$を満たす行列$\boldsymbol{B}$が一意的に存在する．このとき$\boldsymbol{B}$を$\boldsymbol{A}$の右逆行列という．

∵ $\boldsymbol{A}$の列ベクトルを$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(n)}$とすると定理１より$\boldsymbol{e}^{(j)}$ $(j=1,\cdots,n)$は$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(n)}$の線形結合で表せる．すなわち

$$\boldsymbol{e}^{(j)}=\sum_{k=1}^{n}B_{kj}\,\boldsymbol{y}^{(k)}\quad(j=1,\cdots,n).$$

B_{ij}をi行j列の成分とするn次の正方行列を$\boldsymbol{B}$と表すと，上の式は$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$なる$n$次正方行列行列$\boldsymbol{B}$の存在を意味する[式(１－２)参照]．すなわち$\boldsymbol{B}$は$\boldsymbol{A}$の右逆行列である．一意性は$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(n)}$の線形独立性より従う．すなわち$\boldsymbol{A}\widetilde{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{E}$なる$\boldsymbol{B}$と異なる$n$次正方行列$\widetilde{\boldsymbol{B}}$が存在すれば，行列積の線形性より$\boldsymbol{A}(\widetilde{\boldsymbol{B}}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{0}$．仮定より$\widetilde{\boldsymbol{B}}-\boldsymbol{B}$は零行列とは異なるが，これは$\boldsymbol{y}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{y}^{(n)}$が線形独立であることに矛盾する．■

命題３（左逆行列） $\boldsymbol{A}$を正方行列とする．$\boldsymbol{A}$の行ベクトル全体が線形独立ならば，$\boldsymbol{DA}=\boldsymbol{E}$を満たす行列$\boldsymbol{D}$が一意的に存在する．このとき$\boldsymbol{D}$を$\boldsymbol{A}$の左逆行列という．

∵ 条件を$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$のすべての列ベクトルが線形独立といい換えることができる．命題２より$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$は右逆行列$\boldsymbol{C}$を持つ．すなわち$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{E}$．両辺の転置を取ると$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$．つまり$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$が$\boldsymbol{A}$の左逆行列$\boldsymbol{D}$である．一意性は右逆行列の一意性より従う．■

命題４（列ベクトルが線形独立⇒行ベクトルが線形独立） $\boldsymbol{A}$が正方行列で列ベクトル全体が線形独立ならば，行ベクトル全体も線形独立である．

∵ $\boldsymbol{A}$の行ベクトルの線形結合は，$\boldsymbol{A}$の転置行列$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$と$m$成分の縦ベクトル$\boldsymbol{x}$との積$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$の転置によって表させる．$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$とすると，命題２より$\boldsymbol{A}$は右逆行列$\boldsymbol{B}$を持つのでその転置を両辺に掛けると$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$．$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$だから$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$．これは$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$の全ての列ベクトル，すなわち$\boldsymbol{A}$の全ての行ベクトルが線形独立であることを示している．■

命題５　(行ベクトルが線形独立⇒列ベクトルが線形独立)　$\boldsymbol{A}$が正方行列で行ベクトル全体が線形独立ならば，列ベクトル全体も線形独立である．

∵ $\boldsymbol{A}$の全ての行ベクトルが線形独立なので，命題３より$\boldsymbol{A}$は左逆行列$\boldsymbol{D}$を持つ．$\boldsymbol{A}$の列ベクトルの線形結合はベクトルとの積$\boldsymbol{Ax}$によって表させる．$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$とすると，$\boldsymbol{D}$をその両辺に掛けて$\boldsymbol{DAx} = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$．すなわち$\boldsymbol{A}$の全ての列ベクトルが線形独立．■

正方行列の場合には列ベクトル全体が線形独立であることと行ベクトル全体が線形独立であることが同値であることを命題４および５は示している．従って右逆行列と左逆行列は同時に存在する．そしてさらに次のことがいえる．

命題６　(逆行列)　左右の逆行列は等しい．すなわち$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}$.

∵

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{DA})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{D}. \quad ■$$

これより左右の逆行列を区別する必要がなくなり，これらを単に逆行列と呼べるようになる．左右の逆行列の一意性から逆行列は一意的である．これでようやく(正方)行列の正則性が定義できる．

定義：正則
正方行列が逆行列を持つとき，その行列を正則な行列と呼ぶ．

命題７　(正則性⇒列ベクトルが線形独立)　正方行列$\boldsymbol{A}$が正則ならば，列ベクトル全体は線形独立である．

∵ 逆行列が存在するから$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{A}$の列ベクトルの線形結合が$\boldsymbol{Ax}$で$\boldsymbol{x}$はその係数ベクトルだから，列ベクトル全体は線形独立である．■

命題２～７より，

行列は正則⇔列ベクトル全体が線形独立⇔行ベクトル全体が線形独立

が示された．

Lesson 6　部分空間の基底と次元

定義：部分空間の基底

$\mathbb{R}^N$の部分空間$\boldsymbol{X}$における線形独立なm個のベクトル$\boldsymbol{x}^{(i)}(i=1,\cdots,m)$が$\boldsymbol{X}$を張るとき，すなわち$\boldsymbol{X}=\mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(i)}, i=1,\cdots,m\right)$，これら$m$個のベクトルを$\boldsymbol{X}$の基底といい，各$\boldsymbol{x}^{(i)}$を$\boldsymbol{X}$の基底ベクトルという．

ものわかりが悪くなった読者なら上の定義を読んで,「どんな部分空間でも基底があるのか？」,「基底ベクトルの個数mは$\boldsymbol{X}$に固有の値なのか？それとも基底に依るのか？」といった疑問が自然と浮かぶだろう．このような素朴な疑問に対する答が以下の定理 2 および定理 3 である．

定理２

$\mathbb{R}^N$の部分空間$\boldsymbol{X}(\neq\{\boldsymbol{0}\})$には基底が存在する．

∵ Lesson 4 の$\mathbb{R}^N$の基底と同様の構成法を示す．$\boldsymbol{X}\neq\{\boldsymbol{0}\}$なので$\boldsymbol{x}^{(1)}\neq\boldsymbol{0}$となる$\boldsymbol{X}$の要素がある．$\boldsymbol{x}^{(1)}\neq\boldsymbol{0}$なので$\boldsymbol{x}^{(1)}$は線形独立である．$\boldsymbol{X}=\mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(1)}\right)$ならば$\boldsymbol{x}^{(1)}$が$\boldsymbol{X}$の基底となる．そうでなければ$\boldsymbol{x}^{(2)}\notin\mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(1)}\right)$なる$\boldsymbol{X}$の要素がある．Lesson 3 の(i)より$\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)}$は線形独立である．もし$\boldsymbol{X}=\mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)}\right)$なら$\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)}$が$\boldsymbol{X}$の基底となる．そうでないなら$\boldsymbol{x}^{(3)}\notin\mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)}\right)$なる$\boldsymbol{X}$の要素があり，同じ理屈で$\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\boldsymbol{x}^{(2)}$は線形独立となる．この様な操作を延々と続けることはできない．もし$\boldsymbol{X}=\mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(i)}(i=1,\cdots,m)\right)$となる$m(\leq N)$が存在しなければ，$\mathbb{R}^N$における線形独立なベクトルの最大個数が$N$を超えるので定理 1 に反するからだ．そしてこの操作が終了したときの$\boldsymbol{x}^{(i)}(i=1,\cdots,m)$が$\boldsymbol{X}$の基底となる．■

上の証明から分かるように，部分空間の場合でも基底ベクトルの選び方に任意性があるので，部分空間の基底はいくらでもあることが分かる．しかし以下に示すように基底を構成する線形独立なベクトル(基底ベクトル)の個数は，部分空間に固有の値である．

定理３

部分空間の基底ベクトルの個数は基底が異なっても等しい.

∵ 証明は定理 1 の系 1－2 の場合とほとんど同じである．部分空間$\boldsymbol{X}$に二つの基底$\left\{\boldsymbol{x}^{(j)}(j=1,\cdots,m)\right\}$と$\left\{\boldsymbol{y}^{(j)}(j=1,\cdots,n)\right\}$があるとする．$\boldsymbol{x}^{(i)}(i=1,\cdots,m)$は基底だから$\boldsymbol{y}^{(j)}$はその線形結合$\boldsymbol{y}^{(j)}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\boldsymbol{x}^{(i)}$で表される.一方，$\boldsymbol{y}^{(j)}(j=1,\cdots,n)$の線形結合がゼロとすると，

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \boldsymbol{y}^{(j)} = \boldsymbol{0}.$$

よって

$$\sum_{j=1}^{n} b_j \boldsymbol{y}^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \boldsymbol{x}^{(i)} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, b_j \right) \boldsymbol{x}^{(i)} = \boldsymbol{0}.$$

$\boldsymbol{x}^{(i)} (i = 1, \cdots, m)$は線形独立だから，$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}\, b_j = 0\ (i = 1, \cdots, m)$．この連立方程式は$m < n$ならば非自明な解を持つので(系 1－1)，$\boldsymbol{y}^{(i)} (i = 1, \cdots, n)$が線形独立であることに矛盾する．従って$m \geq n$でなければならない．上の議論で$\{\boldsymbol{x}^{(i)} (i = 1, \cdots, m)\}$と$\{\boldsymbol{y}^{(i)} (i = 1, \cdots, n)\}$の役割を入れ替えれば，同様に$m \leq n$が結論されるから，結局$m = n$．■

問．$\mathbb{R}^N$自体も$\mathbb{R}^N$の部分空間である．それなら$\mathbb{R}^N$の次元がNであることを示すのに定理３で十分で，定理１は必要ないのでは？(定理３の証明のどこに定理１が使われているか？)

定義（部分空間の次元）

部分空間の基底ベクトルの個数を部分空間の次元という．部分空間$\boldsymbol{X}$の次元がmなら$\dim \boldsymbol{X} = m$と表わす．

なお，ゼロベクトルだけの集合$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{0}\}$は，その要素に線形演算を施してもゼロベクトルなので，部分空間である．しかしこれには基底がなく($\{\boldsymbol{0}\}$は線形独立でない！)，その次元をゼロと定める．

系 3－1

部分空間における線形独立なベクトルの最大の個数は，その部分空間の次元に等しい．

∵ 定理３の証明の前半において，$\boldsymbol{y}^{(j)} (j = 1, \cdots, n)$を基底ベクトルとする代わりに単に線形独立であることだけを仮定しても$m \geq n$が従う．■

系 3－2

部分空間$\boldsymbol{X}$の次元をmとすると，$\boldsymbol{X}$におけるm個の線形独立なベクトル$\boldsymbol{x}^{(i)} (i = 1, \cdots, m)$は$\boldsymbol{X}$の基底である．

∵ $\boldsymbol{x}^{(i)} (i = 1, \cdots, m)$が$\boldsymbol{X}$を張ることを示せばよい．$\boldsymbol{x} \notin \operatorname{span}(\boldsymbol{x}^{(i)}, i = 1, \cdots, m)$なる$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$が有れば，$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{x}^{(i)} (i = 1, \cdots, m)$は線形独立(Lesson 3 の(i))なので，系 3－1 に矛盾する．■

これで Lesson 3 の宿題を片付ける準備が整った．Lesson 3 の(ii)の説明では，条件 A「n個のベクトル$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i = 1, \cdots, n)$に含まれる線形独立なものの最大個数のベクトル」をどうやって選ぶのかという疑問に対し，条件 B「n個のベクトル$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i = 1, \cdots, n)$が，線形独立なr個のベクトル$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s = 1, \cdots, r)$とこれらの線形結合で表される$n - r$個のベクトルに分けられる」を満たすベクトルを選ぶアルゴリズムが紹介された. 条件 B は$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s = 1, \cdots, r)$が条件 A を満たすための必要条件であるが，これが十分条件でもあることを示すのが宿題であった.

Lesson 3 の式(3－2)の証明を読み返すと，$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s = 1, \cdots, r)$が条件 A を満たせばその必要条件である条件 B が満たされ, そして条件 B を満たす$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s = 1, \cdots, r)$に対して式(3－2)が成り立つという論理の流れが確認されるだろう．式(3－2)は$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s = 1, \cdots, r)$が$\boldsymbol{X} = \mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(i)}, i = 1, \cdots, n\right)$の基底であることを意味し，条件 B を出発点として式(3－2)が導かれるので, 条件 B を満たす$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s = 1, \cdots, r)$は$\boldsymbol{X}$の基底である．従ってその個数rは部分空間$\boldsymbol{X}$の次元である．すなわち$r = \dim \boldsymbol{X}$. もし$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i = 1, \cdots, n)$の中の線形独立なベクトルの最大個数が$\dim \boldsymbol{X}$を超えるならば，その最大個数に対する線形独立なベクトルが Lesson 3 の(ii)より$\boldsymbol{X}$を張ることになる. つまりrよりも大きい個数の線形独立なベクトルが$\boldsymbol{X}$の基底になり，これは定理 3 に矛盾する．従って条件 B におけるrは条件 A における最大個数に一致する. つまり条件 B を満たすベクトル$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s = 1, \cdots, r)$は条件 A を満たすベクトルである.

Lesson 3 の(ii)を命題の形で示しておく.

<u>命題 8</u>

$\mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(i)}, i = 1, \cdots, n\right)$の次元は$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i = 1, \cdots, n)$に含まれる線形独立なものの最大個数に等しく，その最大個数r個の線形独立なベクトル$\boldsymbol{x}^{(i_s)}$ $(s = 1, \cdots, r)$は$\mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(i)}, i = 1, \cdots, n\right)$の基底である.

Lesson 7 和空間，直和，補空間

定義：和空間

$\boldsymbol{X}$および$\boldsymbol{Y}$をそれぞれ$\mathbb{R}^N$の部分空間とする．$\boldsymbol{X}$に属するベクトルと$\boldsymbol{Y}$に属するベクトルの和を要素とする集合$\{\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{u}\in\boldsymbol{X},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{Y}\}$は$\mathbb{R}^N$の部分空間であり，これを$\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{Y}$の和空間と呼び，$\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}$と表す．

和空間が部分空間であることの確認は読者に任せる．和空間は桂離宮の書院の中のような空間ではないという注意は読者には不要だが，和空間と和集合との違いには注意を要する．部分空間$\boldsymbol{X}$および$\boldsymbol{Y}$をそれぞれベクトルの集合と見なせば和集合$\boldsymbol{X}\cup\boldsymbol{Y}$を考えることができるが，これは一般に部分空間ではない(部分空間となる場合と部分空間にならない場合の実例を挙げることは読者に任せる)．一方，和集合の場合とは対照的に，部分空間の共通集合$\boldsymbol{X}\cap\boldsymbol{Y}$は常に部分空間である．確認は読者に任せる．

定義：直和，補空間

$\mathbb{R}^N$が二つの部分空間$\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{Y}$の和空間でかつ$\boldsymbol{X}\cap\boldsymbol{Y}=\{\boldsymbol{0}\}$を満たすとき，$\mathbb{R}^N$は$\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{Y}$の直和であるといい，$\mathbb{R}^N=\boldsymbol{X}\dot{+}\boldsymbol{Y}$と表す．このとき，$\boldsymbol{Y}$を$\boldsymbol{X}$の補空間，$\boldsymbol{X}$を$\boldsymbol{Y}$の補空間と呼ぶ．

$\mathbb{R}^N$が$\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{Y}$の和空間ならば，$\mathbb{R}^N$の任意の要素$\boldsymbol{w}$は$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v},\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{X},\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{Y}$と表されるが，さらに直和である場合には$\boldsymbol{u}\in\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{v}\in\boldsymbol{Y}$は$\boldsymbol{w}$から一意に決まる．

$\because$ $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{u}_2+\boldsymbol{v}_2$，$\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\in\boldsymbol{Y}$とすると$\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1$．左辺は$\boldsymbol{X}$に属し右辺は$\boldsymbol{Y}$に属すが，直和であるから$\boldsymbol{X}\cap\boldsymbol{Y}$の要素は$\{\boldsymbol{0}\}$しかなく，$\boldsymbol{u}_1-\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1=\boldsymbol{0}$．■

<u>例１</u> x_2x_3平面上のベクトルの集合とx_3x_1平面上のベクトルの集合はそれぞれ$\mathbb{R}^3$の部分空間であり，$\mathbb{R}^3$はこれらの空間の和空間であるが，直和ではない．

<u>例２</u> x_2x_3平面上のベクトルの集合とx_1軸上のベクトルの集合はそれぞれ$\mathbb{R}^3$の部分空間であり，$\mathbb{R}^3$はこれらの直和である．

なお，上の和空間，直和，補空間の定義で$\mathbb{R}^N$を$\mathbb{R}^N$の部分空間$\boldsymbol{W}$と置き換えることができる．その場合，補空間は$\boldsymbol{W}$における$\boldsymbol{X}$の補空間というように「$\boldsymbol{W}$における」と断り書きをつけなければならない．この付録では$\mathbb{R}^N$における補空間だけを扱うので，この断り書きはない．

補空間の定義だけで満足してはいけない．「補空間って本当にあるの？」と疑わなければ，頭の中に補空間を作れない．

補空間の存在

$\mathbb{R}^N$のどんな部分空間$\boldsymbol{X}$に対してもその補空間は必ず存在する．例えば$\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{0}\}$の場合はその補空間$\boldsymbol{Y}$は$\mathbb{R}^N$であり，$\boldsymbol{X}=\mathbb{R}^N$の場合はその補空間$\boldsymbol{Y}$は$\{\boldsymbol{0}\}$である．以下では$1\le\dim\boldsymbol{X}<N$の場合にその補空間の存在を示す．そのために$\boldsymbol{X}$の基底ベクトルを使って$\mathbb{R}^N$の基底を構成するが，それには次の補題が必要になる．

補題２

ベクトルの集合$\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m\}$および$\{\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n\}$がそれぞれ線形独立とすると，
$\mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\cap\mathrm{span}\,(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n)=\{\boldsymbol{0}\}\leftrightarrows\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n\}$は線形独立.

∵ 対偶を書くと

$$\mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\cap\mathrm{span}\,(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n)\neq\{\boldsymbol{0}\}\rightleftarrows\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n\}\text{は線形従属.}$$

これを証明しよう．

$\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n\}$が線形従属ならば$(c_1,\cdots,c_m,d_1,\cdots,d_n)\neq\{\boldsymbol{0}\}$なる係数ベクトルが存在して$\sum_{i=1}^m c_i\,\boldsymbol{a}_i+\sum_{i=1}^n d_i\,\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{0}$．$\boldsymbol{c}=(c_1,\cdots,c_m)$および$\boldsymbol{d}=(d_1,\cdots,d_n)$とすると，(i) $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$かつ$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$の場合は有り得ない．さらに$\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m\}$および$\{\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n\}$がそれぞれ線形独立なので，(ii) $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$かつ$\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$，(iii) $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$かつ$\boldsymbol{d}\neq\boldsymbol{0}$の場合も有り得ない．残された可能性は(iv) $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$かつ$\boldsymbol{d}\neq\boldsymbol{0}$の場合だけであり，このとき，$\sum_{i=1}^m c_i\,\boldsymbol{a}_i=-\sum_{i=1}^n d_i\,\boldsymbol{b}_i$はゼロベクトルでは有り得ず，これは$\mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\cap\mathrm{span}\,(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n)\neq\{\boldsymbol{0}\}$を意味する．

$\boldsymbol{Z}=\mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)\cap\mathrm{span}\,(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n)\neq\{\boldsymbol{0}\}$ならば，$\boldsymbol{z}\neq\boldsymbol{0}$ なる$\boldsymbol{Z}$に属するベクトルが存在する．$\boldsymbol{z}\in\mathrm{span}\,(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m)$かつ$\boldsymbol{z}\in\mathrm{span}\,(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n)$なので，$\sum_{i=1}^m c_i\,\boldsymbol{a}_i-\sum_{i=1}^n d_i\,\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{0}$を満たす$\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$および$\boldsymbol{d}\neq\boldsymbol{0}$が存在する．すなわち$\{\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_n\}$は線形従属．■

$\dim\boldsymbol{X}=m$とする．$1\le m<N$ならば$\boldsymbol{X}\neq\mathbb{R}^N$．従って$\boldsymbol{b}_1\notin\boldsymbol{X}$なるベクトルが$\mathbb{R}^N$内に存在する．$\boldsymbol{X}$の基底ベクトルを$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$とすると，$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}_1$は線形独立である(Lesson 3 (i))．$m+1=N$なら$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$および$\boldsymbol{b}_1$が$\mathbb{R}^N$の基底ベクトルになり(定理１), $m+1<N$なら$\boldsymbol{b}_2\notin\mathrm{span}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}_1)$なるベクトルが$\mathbb{R}^N$内にあり，$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2$が線形独立となる．このような操作を繰り返すことで$N-m$個のベクトル$\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_{N-m}\notin\boldsymbol{X}$を選ぶことができ，$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m$, $\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_{N-m}$が$\mathbb{R}^N$における$N$個の線形独立なベクトルになる．従って定理１よりこれらN個のベクトルは$\mathbb{R}^N$の基底であり，$\mathbb{R}^N$の任意の要素$\boldsymbol{r}$は

$$\boldsymbol{r} = c_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{a}_m + d_1\,\boldsymbol{b}_1 + \cdots d_{N-m}\boldsymbol{b}_{N-m},$$

と表される．これは$\mathbb{R}^N$が$\mathrm{span}(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m) = \boldsymbol{X}$と$\mathrm{span}(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_{N-m}) = \boldsymbol{Y}$の和空間であることを示しており，さらに$\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_m,\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_{N-m}$が線形独立であることから，補題 2 より$\boldsymbol{X}\cap\boldsymbol{Y} = \{\boldsymbol{0}\}$が従う．すなわち$\boldsymbol{Y}=\mathrm{span}(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_{N-m})$は$\boldsymbol{X}$の補空間である．

問．上の説明から$\dim\boldsymbol{X} + \dim\boldsymbol{Y} = N$ではないのかと予想されるが，これはあくまで予想であって，上の説明はこれを証明するものではない．なぜか？

補空間の次元

$\boldsymbol{X}$の次元とその補空間$\boldsymbol{Y}$の次元の和はNである．つまり

$$\dim\boldsymbol{X} + \dim\boldsymbol{Y} = N. \tag{7-1}$$

∵ $\dim\boldsymbol{X} = m$，$\boldsymbol{X}$の基底ベクトルを$\boldsymbol{x}^{(i)}$ $(i = 1,\cdots,m)$，$\boldsymbol{X}$の補空間を$\boldsymbol{Y}$，$\dim\boldsymbol{Y} = n$，$\boldsymbol{Y}$の基底ベクトルを$\boldsymbol{y}^{(i)}$ $(i = 1,\cdots,n)$とする．$\boldsymbol{X}\cap\boldsymbol{Y} = \{\boldsymbol{0}\}$だから補題 2 より和集合$\{\boldsymbol{x}^{(i)}, i = 1,\cdots,m\}\cup\{\boldsymbol{y}^{(i)}, i = 1,\cdots,n\}$は線形独立である．さらに

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^N &= \mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(i)}, i = 1,\cdots,m\right) + \mathrm{span}\left(\boldsymbol{y}^{(i)}, i = 1,\cdots,n\right)\\ &= \mathrm{span}\left(\{\boldsymbol{x}^{(i)}, i = 1,\cdots,m\}\cup\{\boldsymbol{y}^{(i)}, i = 1,\cdots,n\}\right),\end{aligned}$$

だから，Lesson 4 の系 1－2 より$m + n = N$．すなわち式(7－1)が成り立つ．■

補空間の任意性

部分空間$\boldsymbol{X}$の補空間の次元は$\boldsymbol{X}$の次元に応じて一意的に定まるが，補空間そのものは一意的に定まるのであろうか？$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{0}\}$の場合にはその補空間は$\boldsymbol{Y} = \mathbb{R}^N$しかなく，$\boldsymbol{X} = \mathbb{R}^N$の場合には補空間は$\boldsymbol{Y} = \{\boldsymbol{0}\}$しかない．しかし上記以外の一般の場合ではそうではないことは，補空間の存在を示す上の議論で基底の選び方に任意性があったことから分かるだろう(Lesson 4 参照)．例えば$\mathbb{R}^2$におけるベクトル$(1,1)^{\mathrm{T}}$の張る空間を$\boldsymbol{X}$とすると，その補空間$\boldsymbol{Y}$はゼロベクトル以外で$(1,1)^{\mathrm{T}}$と平行でないベクトルの張る空間ならなんでもよい．それは$(1,0)^{\mathrm{T}}$の張る空間でもよいし，$(0,1)^{\mathrm{T}}$の張る空間でもよく，これらの空間は異なっている．

Lesson 8　行列の階数

行列の階数に関する定義は色々あるが，ここでは３つの定義を取り上げる．

$\boldsymbol{A}$をm行n列の行列とする．rank $\boldsymbol{A}$が表す行列$\boldsymbol{A}$の階数には以下の二つの定義がある．

定義 A　$\boldsymbol{A}$のn個の列ベクトル$\boldsymbol{a}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{a}^{(n)}$の中に含まれる線形独立なベクトルの最大個数.

定義 B　$\boldsymbol{A}$のm個の行ベクトル$\tilde{\boldsymbol{a}}^{(1)},\cdots,\tilde{\boldsymbol{a}}^{(m)}$の中に含まれる線形独立なベクトルの最大個数.

上の二つの定義は矛盾しない．これは線形代数における最も美しい定理の１つによって保証される．

定理 4
行列の列ベクトルの中に含まれる線形独立なベクトルの最大個数と行ベクトルの中に含まれる線形独立なベクトルの最大個数は一致する．

∵ m行n列の行列$\boldsymbol{A}$の列ベクトル$\boldsymbol{a}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{a}^{(n)}$に含まれる線形独立なベクトルの最大個数を$r$とし，$r$個の線形独立な列ベクトルを$\boldsymbol{c}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{c}^{(r)}$とし，さらに$\boldsymbol{c}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{c}^{(r)}$を列ベクトルとする$m$行$r$列の行列を$\boldsymbol{C}$とする．$\boldsymbol{A}$の各列ベクトルは$\boldsymbol{c}^{(1)},\cdots,\boldsymbol{c}^{(r)}$の線形結合で表される．すなわち$\boldsymbol{a}^{(i)}=\sum_{k=1}^{r}M_{ki}\boldsymbol{c}^{(k)}$ $(i=1,\cdots,n)$と表せる．これは$\boldsymbol{A}$が$\boldsymbol{C}$とM_{ki}を成分とするr行n列の行列$\boldsymbol{M}$との積$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{CM}$の形で表されることを示している(式(1−2)参照)．一方，行列積を式(1−3)の見方をすると，$\boldsymbol{A}$の各行ベクトルは$\boldsymbol{M}$の行ベクトルの線形結合になっていることが分かる．$\boldsymbol{M}$の行ベクトルのうち線形独立なベクトルの最大個数をr'とすると，$\boldsymbol{A}$の各行ベクトルはこれらr'個の線形独立なベクトルの張る空間の要素である．従って$\boldsymbol{A}$の行ベクトルに含まれる線形独立なベクトルの最大の個数をpとすると，pはr'を超えない(系 3−1)．そして$r'\leq r$だから$p\leq r$が言える．次に$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$を考えると，$p$は$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$の列ベクトルに含まれる線形独立なベクトルの最大個数で，rは$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$の行ベクトルに含まれる線形独立なベクトルの最大個数である．pとrの意味が入れ替わるから，同じ議論によって$r\leq p$．従って$r=p$が結論される．■

この定理より直ちに

$$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}},$$

が従う．Lesson 5 で説明したように，正方行列の場合には行ベクトル全体が線形独立であることと列ベクトル全体が線形独立であることは同値であるが(命題 4 および 5)，これは定理 4 に含まれてしまう．行列の階数は行数以下でかつ列数以下，すなわち$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A} \leq \min\{m, n\}$，であることにも注意しよう．

教科書では次のような「試験によく出る定義」も見かける．以下ではそれを紹介するが，その前に行列の行基本変形と列基本変形を説明しておこう．

<u>行基本変形</u>

行列の行基本変形とは，(i)行と行との入れ替え，(ii)ある行にゼロでない定数を掛ける，(iii)ある行に他の行の定数倍を加えるといった 3 つの操作のことを言う．m行n列の行列$\boldsymbol{A}$の行基本変形はあるm次の正方行列を$\boldsymbol{A}$の左から掛けることで行える(式(1－3)参照)．行基本変形には必ずそれを元に戻す逆の行基本変形があるので，この行基本変形を表す正方行列は正則である．その具体形はここでは省略する．興味のある読者は手元の教科書等を参照していただきたい．行基本変形を複数回施す場合も，正則行列の積は正則行列なので(実際$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$なる逆行列を持つ)，正則行列を$\boldsymbol{A}$の左から掛けることに変わりがない．すなわち$\boldsymbol{A}$に行基本変形を複数回施すことは，適当な$m$次の正則行列$\boldsymbol{P}$を$\boldsymbol{A}$の左側から掛けることに他ならず，その結果は$\boldsymbol{PA}$と表せる．

<u>行基本変形における階数の定義 A の意味での不変性</u>

$\boldsymbol{A}$のi列の列ベクトルを$\boldsymbol{a}^{(i)}$とすると，$\boldsymbol{PA}$のi列の列ベクトルは式(1－1)より$\boldsymbol{Pa}^{(i)}$と表せる．$\boldsymbol{A}$の列ベクトルに含まれる線形独立なベクトルの最大個数をqとし，$\boldsymbol{a}^{(i_1)}, \cdots, \boldsymbol{a}^{(i_q)}$が線形独立とすると，$\boldsymbol{PA}$の列ベクトルに含まれる線形独立なベクトルの最大個数もqで，$\boldsymbol{Pa}^{(i_1)}, \cdots, \boldsymbol{Pa}^{(i_q)}$が線形独立になる[3]．すなわち行基本変形によって定義 A の意味での階数は変わらない．

<u>行基本変形における階数の定義 B の意味での不変性</u>

$\boldsymbol{A}$の行ベクトル$\tilde{\boldsymbol{a}}^{(i)}$ $(i = 1, \cdots, m)$に含まれる線形独立なベクトルの最大個数をrとし[4]，$\tilde{\boldsymbol{a}}^{(i_1)}, \cdots, \tilde{\boldsymbol{a}}^{(i_r)}$が線形独立で，残りの$m - r$個の行ベクトルが$\tilde{\boldsymbol{a}}^{(i_1)}, \cdots, \tilde{\boldsymbol{a}}^{(i_r)}$の線形結合によって表されているとしよう．命題 8 より，$\tilde{\boldsymbol{a}}^{(i_1)}, \cdots, \tilde{\boldsymbol{a}}^{(i_r)}$は

---

[3] $c_1\boldsymbol{Pa}^{(i_1)} + \cdots + c_q\boldsymbol{Pa}^{(i_q)} = \boldsymbol{0} \leftrightarrows c_1\boldsymbol{a}^{(i_1)} + \cdots + c_q\boldsymbol{a}^{(i_q)} = \boldsymbol{0}$が$\boldsymbol{P}$の正則性および行列積の線形性より従い，これより$\boldsymbol{Pa}^{(i_k)}$ $(k = 1, \cdots, q)$が線形独立であることが言える．$\boldsymbol{Pa}^{(i_k)}$ $(k = 1, \cdots, q + s)$ $(s \geq 1)$が線形独立とすると，同様に$\boldsymbol{a}^{(i_k)}$ $(k = 1, \cdots, q + s)$ $(s \geq 1)$も線形独立になり，これは仮定に矛盾するから$s = 0$.

[4] 定理 4 より$q = r$であるが，ここでは敢えてこれを使わない．

$\boldsymbol{W} = \mathrm{span}\left(\tilde{\boldsymbol{a}}^{(i)}\ (i = 1, \cdots, m)\right)$ の基底ベクトルで，$\boldsymbol{W}$の次元はrである．行基本変形後の行列の行ベクトルの張る空間は$\boldsymbol{W}$のままであるので[5]，行基本変形後の行ベクトルの中で線形独立なものの最大個数は$\boldsymbol{W}$の次元のrである．従って行基本変形によって定義 B の意味での階数も変わらない．行基本変形を複数回行っても定義 B の意味での階数は変化せず，$\boldsymbol{PA}$の定義 B の意味での階数はrである．

<u>列基本変形</u>

列基本変形とは, (i)列と列との入れ替え, (ii)ある列にゼロでない定数を掛ける, (iii)ある列に他の列の定数倍を加えるといった 3 つの操作のことを言う．
m行n列の行列$\boldsymbol{A}$の列基本変形はあるn次の正方行列を$\boldsymbol{A}$の右から掛けることで行える(式(1－2)参照)．行基本変形の場合と同様に，この正方行列は正則である．その具体形は手元の教科書等を参照していただきたい．列基本変形を複数回施す場合も，ある正則行列を$\boldsymbol{A}$の右から掛けることに変わりがない．すなわち$\boldsymbol{A}$に列基本変形を複数回施すことは，適当なn次の正則行列$\boldsymbol{Q}$を$\boldsymbol{A}$の右側から掛けることと同じであり，その結果は$\boldsymbol{AQ}$と表される．行基本変形の場合と同様に，列基本変形を施しても行列の階数は定義 A の意味でも定義 B の意味でも変わらない．確認は読者に任せる．

<u>階段行列</u>

後で述べる複数回の行基本変形を施すと，次のような階段行列の形に$\boldsymbol{A}$を変形することができる．

$$\boldsymbol{PA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

行ベクトルの成分で最初のゼロでない成分を主成分と呼ぶことにすると，この階段行列$\boldsymbol{PA}$の特徴は以下の通りである．

(i) $\boldsymbol{A}$の定義 B の意味での階数をrとすると$(1 \le r \le m)$，r行まではゼロベクトル

[5] $\boldsymbol{A}$の行ベクトルの線形結合はm成分の縦ベクトルを$\boldsymbol{y}$とすると$\boldsymbol{yA}$で表される．$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{yP}^{-1}$(あるいは$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Pz}$)とすると，$\boldsymbol{zPA} = \boldsymbol{yA}$が成り立つから，$\boldsymbol{A}$の行ベクトルが張る空間は$\boldsymbol{PA}$の行ベクトルが張る空間に等しい．

の行でなく，$r+1$行以降はすべてゼロベクトルの行である($r=m$の場合はゼロベクトルの行はない).

(ii) 主成分はすべて 1 である．

(iii) i行の主成分が現れる列を$j(i)$とすると，$j(1)<j(2)<\cdots$．すなわち主成分が現れる列は行が下がるほど右へ移動する．

(iv) 主成分がj列にあるとすると，その列ベクトルは$\mathbb{R}^m$の基本ベクトル$\boldsymbol{e}^{(j)}$である．

手順: 1 行からm行までの各行に対して次の操作を行う(操作を行う行の順序は特に指定しない)．行ベクトルにおける主成分の有無を調べ，主成分が有ればその行全体を定数倍して主成分を 1 にし，その主成分がある列の列ベクトルのそれ以外の全ての成分を行基本変形を行ってゼロにする．最後に(i)および(iii)を満たすように行を入れ替える．

主成分がある列が基本ベクトルで，主成分がr個あるということは，$\boldsymbol{PA}$の列ベクトルの中にr個の線形独立なベクトルがあることを意味する．行基本変形の説明で述べたように, $\boldsymbol{A}$の定義 A の意味での階数をqとすると$\boldsymbol{PA}$の列ベクトルの中には最大q個の線形独立なものがあるから，$r \le q$である．

標準形

$\boldsymbol{PA}$に対して列基本変形を行って，行ベクトルの主成分以外の成分を全てゼロにすることができる．その結果，主成分のある列ベクトル以外の全ての列ベクトルがゼロベクトルになる．列基本変形によって線形独立な列ベクトルの最大個数は変わらないので$r=q$が結論される(これは定理 4 の別の証明になっている).
具体的には

手順: 主成分を含む 1 行からr行までの各行に対して, 行ベクトルの主成分以外の成分が全てゼロになるように列基本変形を行う．この操作を行う行の順序は特に指定しない．最後に$j(i)=i\ (i=1,\cdots,r)$となるように列の入れ替えを行う．

上の列基本変形を階段行列$\boldsymbol{PA}$に施せば，次のような標準形を得る．

$$
\boldsymbol{PAQ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

<u>定義 C</u>　$\boldsymbol{A}$をm行n列のゼロ行列でない行列とすると，m次の正則行列$\boldsymbol{P}$およびn次の正則行列$\boldsymbol{Q}$が存在して

$$
\boldsymbol{PAQ} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix},
$$

という標準形に行列$\boldsymbol{A}$を変形することができる．このときの単位行列$\boldsymbol{E}_r$の次数$\boldsymbol{r}$を行列$\boldsymbol{A}$の階数とする．ゼロ行列の場合は階数はゼロである．

Lesson 9 像および核

$\boldsymbol{A}$をm行n列の行列とし，$\boldsymbol{x}$をn成分の縦ベクトルとする．行列$\boldsymbol{A}$によるベクトル$\boldsymbol{x}$の写像$\boldsymbol{Ax}$はm成分の縦ベクトルである．すなわちm行n列の行列$\boldsymbol{A}$は$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$の写像を与える．さらに行列積の線形性よりこの写像は線形である．

定義：像空間

行列$\boldsymbol{A}$による$\mathbb{R}^n$の全ての元(要素)に対する線形写像の像の集合を$\boldsymbol{A}$の像空間といい，$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$と表す．すなわち

$$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{Ax} | \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n\}.$$

$\boldsymbol{Ax}$は$\boldsymbol{A}$の列ベクトルの線形結合だから，$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$は$\boldsymbol{A}$の列ベクトルの張る空間で$\mathbb{R}^m$の部分空間になっている．$\boldsymbol{A}$の列ベクトルに含まれる線形独立なベクトルの最大個数をr，すなわち rank $\boldsymbol{A} = r$とし，$\boldsymbol{A}$の列ベクトルのうち$j_1, \cdots, j_r$列が線形独立とすると，これらr個の線形独立な列ベクトルは命題 8 より$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$の基底であり，$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$の次元は$r$に等しい．すなわち$\dim(\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$である．

定義：核

$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$となる$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$の集合を行列$\boldsymbol{A}$の核といい，これを$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$と表す．すなわち

$$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\}.$$

$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$は$\mathbb{R}^n$の部分空間である．確認は読者に任せる．核が零空間でない場合，$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A} \neq \{\boldsymbol{0}\}$，を考えると，Lesson 6 の定理 2 によって$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$には基底がある．その基底ベクトルを$\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_k$と表すことにする．$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$は部分空間なので Lesson 7 で説明したように補空間が存在し，$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$の基底とその補空間の基底$\boldsymbol{z}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{z}_n$を合わせた$n$個の線形独立なベクトル$\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_n$が$\mathbb{R}^n$の基底になる．$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{0}\}$の場合には基底はないが，その補空間が$\mathbb{R}^n$になり，補空間の基底として$\mathbb{R}^n$の基底が構成される．

命題 9

$\boldsymbol{Az}_1, \cdots, \boldsymbol{Az}_n$は$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$を張る．

∵ $\mathbb{R}^n$の基本ベクトルを$\boldsymbol{e}^{(i)}$ $(i = 1, \cdots, n)$とすると，$\boldsymbol{Ae}^{(i)}$ $(i = 1, \cdots, n)$は$\boldsymbol{A}$の各列ベクトルであるので$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{span}\left(\boldsymbol{Ae}^{(i)}, i = 1, \cdots, n\right)$である．$\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_n$は$\mathbb{R}^n$の基底だからこれらの線形結合

で$\boldsymbol{e}^{(i)}$ $(i = 1, \cdots, n)$は表せる．行列積の線形性より各$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{(i)}$は$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_n$の線形結合で表されるから，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{span}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{(i)}, i = 1, \cdots, n\right) = \mathrm{Im}\,\boldsymbol{A} \Longrightarrow \boldsymbol{x} \in \mathrm{span}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_n)$. その逆，すなわち$\boldsymbol{x} \in \mathrm{span}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}^{(i)}, i = 1, \cdots, n\right) = \mathrm{Im}\,\boldsymbol{A} \Longleftarrow \boldsymbol{x} \in \mathrm{span}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_n)$は$\boldsymbol{z}_i$ $(i = 1, \cdots, n)$が$\boldsymbol{e}^{(j)}$ $(j = 1, \cdots, n)$の線形結合で表されることから従う．■

<u>命題 10</u>

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_n$は線形独立.

∵ $c_{k+1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_{k+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_n = \boldsymbol{0}$とすると，行列積の線形性より$\boldsymbol{A}(c_{k+1}\boldsymbol{z}_{k+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{z}_n) = \boldsymbol{0}$. $c_{k+1}\boldsymbol{z}_{k+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{z}_n$は$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$とその補空間の両方に属するから$c_{k+1}\boldsymbol{z}_{k+1} + \cdots + c_n\boldsymbol{z}_n = \boldsymbol{0}$. $\boldsymbol{z}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{z}_n$は$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$の補空間の基底だから線形独立で$c_{k+1} = \cdots = c_n = 0$が結論される．■

<u>命題 11</u>

$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_n$は$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$を張る.

∵ 命題 9 より$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_k, \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_n$は$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$を張る．しかし$\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_k \in \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$だから$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_1 = \cdots = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_k = \boldsymbol{0}$で，結局$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_n$が$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$を張ることが結論される．■

命題 10 および 11 より$\boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_{k+1}, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{z}_n$は$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$の基底である．その基底ベクトルの個数，すなわち$\dim(\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A})$，は$n-k$，すなわち$n - \dim(\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A})$に等しい．一方，$\dim(\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$であった．以上をまとめればよく知られた定理が得られる.

<u>定理 5 （次元定理）</u>

m行n列の行列$\boldsymbol{A}$に対して

$$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A} + \mathrm{null}\,\boldsymbol{A} = n,$$

が成り立つ．ここに$\mathrm{null}\,\boldsymbol{A} \equiv \dim(\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A})$.

<u>次元定理の導出の反省</u>

筆者は$\dim(\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}) + \dim(\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}) = n$を使った上の次元定理の証明が気に入らない．確かに$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$も$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$も行列$\boldsymbol{A}$に関する量だ．しかし$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$は$\mathbb{R}^m$の部分空間で$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$は$\mathbb{R}^n$の部分空間なのだ. 異なる線形空間に属する部分空間の次元同士を足すという行為にストーリー性を感じられず，全然美しくないのだ．この話の続きは Lesson 13 でする.

最後に階数を使った連立一次方程式の解の存在に関する教科書でお馴染みの定

理を紹介する．

定理６

$\boldsymbol{A}$をm行n列の行列とする．非同次連立一次方程式

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},$$

が解を持つのは，行列$\boldsymbol{A}$の全ての列ベクトルと縦ベクトル$\boldsymbol{b}$を並べてできるm行$n+1$列の行列$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{b})$の階数が行列$\boldsymbol{A}$の階数と等しい場合に限られる．

つまり連立一次方程式$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$が解を持つための必要十分条件は$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A} = \mathrm{rank}\,\boldsymbol{C}$.

$\because$ $\boldsymbol{Ax}$は$\boldsymbol{A}$の列ベクトルの線形結合なので， $\boldsymbol{A}$の列ベクトルを$\boldsymbol{a}^{(k)}$ $(k = 1, \cdots, n)$とすると，解が存在するなら$\boldsymbol{b} \in \mathrm{span}\left(\boldsymbol{a}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{a}^{(n)}\right)$でなければならない．このとき$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{C}$の階数は等しい．逆に$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{C}$の階数が等しければ，$\boldsymbol{A}$の列ベクトルに含まれる$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A} = r$個の線形独立なベクトルを$\boldsymbol{a}^{(i_s)}$ $(s = 1, \cdots, r)$と表すと，$\boldsymbol{b}$は$\boldsymbol{a}^{(i_s)}$ $(s = 1, \cdots, r)$の線形結合でなければならない．その際の$\boldsymbol{a}^{(i_s)}$の係数を$\boldsymbol{x}$のi_s行成分とし，$\boldsymbol{x}$のi_s $(s = 1, \cdots, r)$行以外の成分をゼロしたものは，連立方程式の解である．■

解の存在が言えると興味の対象は解の一意性に移るだろう．解が二つあるとしてこれらを$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$とすると，その差$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$は同次連立一次方程式$\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{0}$を満たす．従って解が一意となるのは，同次連立一次方程式$\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{0}$の解が$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$に限られる場合であり，それは先に見たように$\boldsymbol{A}$の列ベクトルの全体が線形独立である場合，すなわち$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A} = n$の場合である．あるいは次元定理を使えば$\mathrm{null}\,\boldsymbol{A} = 0$，つまり$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$の場合になる．確かに$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ならば$\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{0}$の解は$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$に限られる．$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A} \leq \min\{m, n\}$であるから，$m < n$の場合(方程式の数が未知数の数よりも小さい場合)には$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A} = n$とはなり得ないことに注意しよう．しかしこれはすでに Lesson 4 系 1－1 で示してある．もし読者が連立方程式の解の一意性を階数や核を使って理解しているならば，それはある基礎事実から導かれた定理を使ってその基礎事実を証明して分かったつもりになっているだけのことである．しかし階数や核は連立一次方程式の解の構造を理解するのには有用になる．連立一次方程式の解は$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{w}$ $(\boldsymbol{w} \in \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A})$と表され，$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A} < n$の場合には，$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$の次元に対応する自由度がある．$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$の基底を求めておけば，連立一次方程式の解を 1 つ見つけるだけで，連立一次方程式の解全体を表せるようになるのである．

なお，定理 6 は Lesson 3 で予告しておいた線形独立なベクトルの判定法に使うことができる．$\boldsymbol{a}^{(i)}\ (i = 1, \cdots, n) \in \mathbb{R}^m$を線形独立なベクトルとすると，ベクトル$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$が$\mathrm{span}\left(\boldsymbol{a}^{(i)}, i = 1, \cdots, n\right)$に属するか否かは上の行列$\boldsymbol{A}$と$\boldsymbol{C}$の階数を比較することで判定できる．具体的な計算は行基本変形および列基本変形である．もちろんこんな非効率な判定法は実際には誰も使わないだろう．それでも数学の証明にはマシンパワーが無限大の計算機を使えるので，効率性は問われないのである．

定理 6 には上のような応用も考えられるが，筆者は定理 6 自体に有用性を感じたことは一度もない．定理 6 は連立一次方程式$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$が解を持つための必要十分条件が$\boldsymbol{b}$が$\boldsymbol{A}$の列ベクトルの張る空間に属すということ，つまり$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$であると言っているのだが，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$が$\boldsymbol{A}$の列ベクトルの線形結合なのだから，当たり前すぎて応用に使えないのである．応用に使える形に言い換えなければならない．この話の続きは Lesson 13 でする．

Lesson 10 内積，直交，射影

定義:　内積

$\mathbb{R}^N$における２つのベクトル$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$との内積は，その成分をそれぞれ$(x_1,\cdots,x_N)$および$(y_1,\cdots,y_N)$とすると[6]

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_Ny_N.$$

ベクトル$\boldsymbol{x}$の大きさ(あるいは$\mathbb{R}^N$における距離)を表す$|\boldsymbol{x}|$は，$|\boldsymbol{x}|=\sqrt{\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}}$ で定義される．

内積には次の性質がある．

(i)　任意の$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^N$に対して$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}\geq 0$．$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}=0 \iff \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}.$

(ii) 任意の$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$，任意の$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^N$に対して

$$(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{z}=\alpha(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{z})+\beta(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{z}).$$

(iii) $\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{x}.$

定義:　直交

$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}=0$が成り立つとき，ベクトル$\boldsymbol{x}$と$\boldsymbol{y}$は直交するという．

射影

高校数学の復習から始めよう．平面上の３点O，A，Bは同一直線上にないとする．点Aから直線OA上に垂線を下しその足をHとする．$\angle BOA=\theta$とすると，

$$\overrightarrow{OH}=\frac{|\overrightarrow{OA}|\cos\theta}{|\overrightarrow{OB}|}\overrightarrow{OB}\,,\qquad (10-1).$$

が成り立つ．$\overrightarrow{OH}$は$\overrightarrow{OA}$の$\overrightarrow{OB}$への射影ベクトルと呼ばれる．一方，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\left|\overrightarrow{\mathrm{O}A}\right|\left|\overrightarrow{OB}\right|\cos\theta,$$

[6] この付録では内積をベクトルの成分だけに注目して定義する．縦ベクトル同士，縦ベクトルと横ベクトル，あるいは横ベクトル同士でも内積は計算できる．だから内積を$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{y}$のようには書かない．

だから射影ベクトル$\overrightarrow{OH}$は内積を用いて

$$\overrightarrow{OH}=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\ \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}\overrightarrow{OB}\ ,\qquad (10-2).$$

と表される．$\overrightarrow{OA}$とその射影ベクトル$\overrightarrow{OH}$との差である$\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OH}$が$\overrightarrow{OB}$と直交することは，直線$HA$が直線$OB$の垂線であることから当たり前であるが，これは内積を計算しても確かめられる．

$$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{OB}\ =\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\ \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2}|\overrightarrow{OB}|^2=0.\qquad (10-3)$$

内積を用いて二つのベクトルの直交性を定義したのと同様に，一般の$\mathbb{R}^N(N\geq 2)$の場合の射影ベクトルを式(10−2)によって定義する．$\mathbb{R}^N$の二つのベクトル$\boldsymbol{a}$および$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$において，$\boldsymbol{a}$の$\boldsymbol{b}$への射影ベクトルを$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$と表し，次式で定義する．

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\ \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}.\qquad (10-4)$$

なお, $\boldsymbol{a}$と$\boldsymbol{b}$が平行, $\boldsymbol{a}=c\boldsymbol{b}$ (cは定数), の場合には, $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\boldsymbol{P}(c\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})=c\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}$である．これは上の幾何学的な説明における$\overrightarrow{HA}=\boldsymbol{0}$の場合に相当する．$\boldsymbol{a}$の$\boldsymbol{b}$への射影ベクトルを次のように定義してもよい．射影ベクトルを$c\boldsymbol{b}$の形とし，cに対して$\boldsymbol{a}-c\boldsymbol{b}$が$\boldsymbol{b}$と直交することを要請するのである．これより式(10−4)が従う．この定義の仕方は，以下に示すベクトルの張る空間への射影ベクトルを考える際に使われる．

互いに直交するm個$(1\leq m\leq N)$のベクトル$\boldsymbol{b}_i\in\mathbb{R}^N(\boldsymbol{b}_i\neq\boldsymbol{0},i=1,\cdots,m)$があるとき(具体的な作り方は Lesson 11 で示す), $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^N$の$\mathrm{span}(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m)$への射影ベクトルを$\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m$の線形結合$\sum_{i=1}^m c_i\,\boldsymbol{b}_i$の形で定義する．その際，$\boldsymbol{a}-\sum_{i=1}^m c_i\,\boldsymbol{b}_i$が$\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m$の全てと直交することを要請すると，線形結合の係数は$c_i=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}_i)$と定まる．$\boldsymbol{a}-\sum_{i=1}^m c_i\,\boldsymbol{b}_i$が$\mathrm{span}(\boldsymbol{b}_1,\cdots,\boldsymbol{b}_m)$と直交することは内積の線形性より従う．

Lesson 11 正規直交基底，Gram-Schmit の直交化

$\mathbb{R}^N$の部分空間$\boldsymbol{X}$の基底$\{\boldsymbol{x}^{(i)}\ \ (i=1,\cdots,n)\}$から$\boldsymbol{X}$の正規直交基底(互いに直交する単位ベクトルの基底)$\{\boldsymbol{n}^{(i)}\ \ (i=1,\cdots,n)\}$を生成する方法として Gram-Schmit の直交化が良く知られている．Gram-Schmit の直交化は Lesson 10 で説明した互いに直交するベクトルの張る空間への射影ベクトルを利用したものである．記号や関数の定義は Lesson 10 を参照されたい．

まず互いに直交する$\mathbb{R}^N$のベクトル$\boldsymbol{b}_i\ (i=1,\cdots,n)$を次の漸化式で$\boldsymbol{x}^{(i)}\ \ (i=1,\cdots,n)$から具体的に生成する．

$$\boldsymbol{b}_1=\boldsymbol{x}^{(1)}, \tag{11-1}$$

$$\boldsymbol{b}_{k+1}=\boldsymbol{x}^{(k+1)}-\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{x}^{(k+1)},\boldsymbol{b}_i\right)\boldsymbol{b}_i\,. \tag{11-2}$$

上の漸化式から帰納法によって以下のことが示される．確認は読者に任せる．

1) $\boldsymbol{b}_i\in\boldsymbol{X}\ (i=1,\cdots,n)$.
2) $\boldsymbol{b}_i\ \in\mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(i)},i=1,\cdots,k\right)$.
3) $\boldsymbol{b}_i\neq\boldsymbol{0}\ (i=1,\cdots,n)$.
4) $\boldsymbol{b}_i\cdot\boldsymbol{b}_j=0\ \ (i\neq j)$.

この$\boldsymbol{b}_i$を正規化

$$\boldsymbol{n}^{(i)}=\frac{\boldsymbol{b}_i}{|\boldsymbol{b}_i|}\quad(i=1,\cdots,n), \tag{11-3}$$

して得られるベクトル$\boldsymbol{n}^{(i)}\ (i=1,\cdots,n)$は$\boldsymbol{X}$の正規直交基底になる．この議論は$\boldsymbol{X}$が$\mathbb{R}^N$の場合にも成り立つことに注意しよう．

Gram-Schmit の直交化はベクトルの線形独立性の判定にも利用できる．線形独立なベクトル $\boldsymbol{x}^{(j)}\ \ (j=1,\cdots,m)$から Gram-Schmit の方法によって正規直交基底$\boldsymbol{n}^{(i)}\ (i=1,\cdots,m)$を生成しておく．ベクトル$\boldsymbol{y}$が$\mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(j)},j=1,\cdots,m\right)$に属するか否かは$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{y}-\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{n}^{(i)})\boldsymbol{n}^{(i)}$を計算すれば判る．もし$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$なら$\boldsymbol{y}\in\mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(j)},j=1,\cdots,m\right)$，$\boldsymbol{p}\neq\boldsymbol{0}$なら$\boldsymbol{y}\notin\mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(j)},\ j=1,\cdots,m\right)$.

Lesson 12 直交補空間

Lesson 7 では$\mathbb{R}^N$のどんな部分空間$\boldsymbol{X}$に対してもその補空間$\boldsymbol{Y}$が存在することを説明した．$\boldsymbol{X}$の補空間はいくらでもあるが，$\boldsymbol{X}$の直交補空間という特別な補空間は一意的である．

定義:　部分空間と部分空間との直交性

$\mathbb{R}^N$の部分空間$\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{Y}$が直交するとは，$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$および$\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$に対して$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$が成り立つことである．このとき$\boldsymbol{X} \perp \boldsymbol{Y}$あるいは$\boldsymbol{Y} \perp \boldsymbol{X}$と表す.

定義:　直交補空間

$\boldsymbol{X} \perp \boldsymbol{Y}$を満たすを$\boldsymbol{X}$の補空間$\boldsymbol{Y}$を$\boldsymbol{X}$の直交補空間といい，$\boldsymbol{X}^{\perp}$と表す.

直交補空間の存在

どんな部分空間$\boldsymbol{X}$に対しても直交補空間は存在する.

Lesson 7 で示したように，部分空間$\boldsymbol{X}$にはかならず補空間が存在する．部分空間が$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{0}\}$や$\boldsymbol{X} = \mathbb{R}^N$の場合にはその補空間$\boldsymbol{Y}$はそれぞれ$\boldsymbol{Y} = \mathbb{R}^N, \boldsymbol{Y} = \{\boldsymbol{0}\}$と一意的に定まる．$\boldsymbol{Y} = \mathbb{R}^N$および$\boldsymbol{Y} = \{\boldsymbol{0}\}$がそれぞれ$\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{0}\}$および$\boldsymbol{X} = \mathbb{R}^N$の直交補空間であることの確認は読者に任せる. 一般の場合を考えるために$\boldsymbol{X}$の基底ベクトルを$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m$とし，$\boldsymbol{X}$の補空間の 1 つ$\boldsymbol{Y}$の基底を$\boldsymbol{a}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_N$とすると，補題 2 より$\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{a}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{a}_N$は$\mathbb{R}^N$の基底である．これら$N$個の基底ベクトルは Lesson 11 の Gram-Schmit の方法で直交化でき, これによって$\mathbb{R}^N$の正規直交基底となる単位ベクトル$\boldsymbol{n}_1, \cdots, \boldsymbol{n}_N$が得られる．$\mathrm{span}(\boldsymbol{n}_1, \cdots, \boldsymbol{n}_m) = \mathrm{span}(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_m)$なので，$\boldsymbol{n}_1, \cdots, \boldsymbol{n}_m$は$\boldsymbol{X}$の基底になっている．また

$$\mathbb{R}^N = \mathrm{span}(\boldsymbol{n}_1, \cdots, \boldsymbol{n}_N) = \mathrm{span}(\boldsymbol{n}_1, \cdots, \boldsymbol{n}_m) \dotplus \mathrm{span}(\boldsymbol{n}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{n}_N),$$

だから$\mathrm{span}(\boldsymbol{n}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{n}_N)$は$\boldsymbol{X}$の補空間に等しい. さらに$\boldsymbol{X} = \mathrm{span}(\boldsymbol{n}_1, \cdots, \boldsymbol{n}_m)$とその補空間$\boldsymbol{Y} = \mathrm{span}(\boldsymbol{n}_{m+1}, \cdots, \boldsymbol{n}_N)$は直交する．実際，$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$および$\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$は

$$\boldsymbol{x} = c_1 \boldsymbol{n}_1 + \cdots + c_m \boldsymbol{n}_m,$$

$$\boldsymbol{y} = c_{m+1} \boldsymbol{n}_{m+1} + \cdots + c_N \boldsymbol{n}_N,$$

と表され, 内積の線形性および基底の直交性より$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = 0$が従う. 従って$\boldsymbol{Y}$は$\boldsymbol{X}$の

直交補空間である．

<u>直交補空間の一意性</u>

部分空間$\boldsymbol{X}$が$\boldsymbol{Y}_1$および$\boldsymbol{Y}_2$という 2 つの直交補空間を有するとしよう．$\boldsymbol{Y}_1 \neq \boldsymbol{Y}_2$ならば，$\boldsymbol{y}_1 \in \boldsymbol{Y}_1$かつ$\boldsymbol{y}_1 \notin \boldsymbol{Y}_2$あるいは$\boldsymbol{y}_2 \in \boldsymbol{Y}_2$かつ$\boldsymbol{y}_2 \notin \boldsymbol{Y}_1$となるベクトルが$\mathbb{R}^N$に存在するはずである．前者の場合について矛盾を示そう．適当な$\boldsymbol{x}_1 \in \boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{y}_1$との和$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{y}_1$を考えると，$\boldsymbol{r}$は$\mathbb{R}^N$の要素なので$\boldsymbol{X}$の要素とその補空間である$\boldsymbol{Y}_2$の要素の和としても一意的に表されるから，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_2$なる$\boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{X}$および$\boldsymbol{y}_2 \in \boldsymbol{Y}_2$が一意的に決まる．すると$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{y}_1 - \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{0}$が成り立つから，この両辺で$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{X}$との内積を計算すると，$\boldsymbol{X} \perp \boldsymbol{Y}_1$および$\boldsymbol{X} \perp \boldsymbol{Y}_2$だから$(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2)^2 = 0$．従って$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$で，結局$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_2$が導かれる．これは$\boldsymbol{y}_1 \notin \boldsymbol{Y}_2$に矛盾する．後者の場合も同様である．

<u>直交補空間の直交補空間</u>

ちょっと頭の体操をしよう．$\boldsymbol{Y}$を$\boldsymbol{X}$の直交補空間とする．すなわち$\boldsymbol{Y}$は$\boldsymbol{X}$の補空間で$\boldsymbol{X} \perp \boldsymbol{Y}$．一方，$\boldsymbol{X}$は$\boldsymbol{Y}$の補空間でもあり，さらに$\boldsymbol{Y} \perp \mathbf{X}$だから，$\boldsymbol{X}$は$\boldsymbol{Y}$の直交補空間であるとも言える．つまり$\boldsymbol{X}$の直交補空間$(\boldsymbol{Y})$の直交補空間は$\boldsymbol{X}$自身である．すなわち$(\boldsymbol{X}^{\perp})^{\perp} = \boldsymbol{X}$．ある部分空間の直交補空間の直交補空間は元の部分空間というのは，僕が愛する人が愛する人は僕というようなものだ．これは僕の愛する人は君だけ，私の愛する人は貴方だけという相思相愛のカップルのような状況でしか成り立たない．いずれかが浮気性なら有り得ない話なのだ．

問．一般に$\boldsymbol{X}$の補空間$\boldsymbol{Y}$の補空間は$\boldsymbol{X}$になるか？

<u>直交補空間の別の定義</u>

直交補空間の定義より$\mathbb{R}^n$の部分空間$\boldsymbol{X}$の直交補空間$\boldsymbol{X}^{\perp}$の任意のベクトルは$\boldsymbol{X}$の全てのベクトルと直交する．逆に$\boldsymbol{X}$の全てのベクトルと直交する$\mathbb{R}^n$のベクトルの集合$\boldsymbol{W}$は$\boldsymbol{X}$の直交補空間$\boldsymbol{X}^{\perp}$である．以下これを示そう．

内積の線形性より$\boldsymbol{W}$は$\mathbb{R}^n$の部分空間である．そして$\boldsymbol{W} \cap \boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{0}\}$である．なぜなら$\boldsymbol{X}$のベクトル$\boldsymbol{x}$で$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = 0$を満たすのは内積の定義より$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$に限られるからである．$\boldsymbol{W}$と$\boldsymbol{X}$の和空間$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{W} + \boldsymbol{X}$を考えるとこれは$\mathbb{R}^n$の部分空間である．$\boldsymbol{Y} = \mathbb{R}^n$なら$\boldsymbol{W}$と$\boldsymbol{X}$の直和が$\mathbb{R}^n$となり，$\boldsymbol{W}$は$\boldsymbol{X}$の補空間である．さらに$\boldsymbol{W}$の全ての要素は$\boldsymbol{X}$と直交するから$\boldsymbol{W}$は$\boldsymbol{X}$の直交補空間$\boldsymbol{X}^{\perp}$に等しい．$\boldsymbol{Y} = \mathbb{R}^n$を背理法で示そう．$\boldsymbol{Y} \neq \mathbb{R}^n$とすると，直交補空間の存在を示した上の議論と同様に，$\mathbb{R}^n$には$\boldsymbol{Y}$と直交するベクトル$\boldsymbol{z}(\neq \boldsymbol{0})$が存在することが言える．$\boldsymbol{Y}$は$\boldsymbol{X}$を含むので$\boldsymbol{z}$は$\boldsymbol{X}$の

全てのベクトルと直交する．すなわち$\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{W} \subset \boldsymbol{Y}$．$\boldsymbol{Y}$の要素で$\boldsymbol{Y}$と直交するのはゼロベクトルだけなので，これは$\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{0}$に矛盾する．従って$\boldsymbol{Y} = \mathbb{R}^n$.

以上のことから$\boldsymbol{X}^{\perp}$の別の定義として次式を得る．

$$\boldsymbol{X}^{\perp} = \{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x} = 0 \text{ for } \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}\}.$$

例　$\boldsymbol{Y}$を$\boldsymbol{x}^{(i)}(i = 1, \cdots, m) \in \mathbb{R}^n$と全て直交する$\mathbb{R}^n$のベクトルの集合とする．すなわち

$$\boldsymbol{Y} = \left\{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{y} \cdot \boldsymbol{x}^{(i)} = 0 \text{ for } \boldsymbol{x}^{(i)}(i = 1, \cdots, m) \in \mathbb{R}^n\right\}.$$

$\boldsymbol{Y}$は$\mathbb{R}^n$の部分空間である．内積の線形性より$\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$は$\boldsymbol{X} = \mathrm{span}\left(\boldsymbol{x}^{(i)}(i = 1, \cdots, m)\right)$と直交する. すなわち$\boldsymbol{Y} \subseteq \boldsymbol{X}^{\perp}$. 逆に$\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}^{\perp}$は$\boldsymbol{x}^{(i)}(i = 1, \cdots, m)$と直交するから, $\boldsymbol{Y} \supseteq \boldsymbol{X}^{\perp}$. 従って$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X}^{\perp}$.

<u>直交補空間と補集合との類似性</u>

集合$\boldsymbol{A}$からその補集合$\overline{\boldsymbol{A}}$は一意的に定まる．集合の補集合に関しては次の等式が成り立つ.

1)　$\overline{\overline{\boldsymbol{A}}} = \boldsymbol{A}$.
2)　$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.
3)　$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

部分空間$\boldsymbol{X}$からその直交補空間$\boldsymbol{X}^{\perp}$も一意的に定まることから, 直交補空間と補集合は類似性を有する．実際，部分空間の直交補空間に関しても上と類似の等式が成り立つ.

i)　$(\boldsymbol{X}^{\perp})^{\perp} = \boldsymbol{X}$.
ii)　$(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y})^{\perp} = \boldsymbol{X}^{\perp} \cap \boldsymbol{Y}^{\perp}$.
iii)　$(\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y})^{\perp} = \boldsymbol{X}^{\perp} + \boldsymbol{Y}^{\perp}$.

∵　i)はすでに示した．ii)および iii)では部分空間$\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{Y}$の共通集合$\boldsymbol{X} \cap \boldsymbol{Y}$は部分空間であることに注意しよう．$\boldsymbol{a} \in (\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y})^{\perp}$とすると$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$と$\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$に対して$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{y}) = 0$から$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{y} = 0$が従うので$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}^{\perp} \cap \boldsymbol{Y}^{\perp}$が言える．すなわち$\boldsymbol{a} \in (\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y})^{\perp} \to \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}^{\perp} \cap \boldsymbol{Y}^{\perp}$.
逆に$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}^{\perp} \cap \boldsymbol{Y}^{\perp}$とすると，$\forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$と$\forall \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$に対して$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{y} = 0$が成り立つので$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = 0$. よって$\boldsymbol{a} \in (\boldsymbol{X} + \boldsymbol{Y})^{\perp} \leftarrow \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{X}^{\perp} \cap \boldsymbol{Y}^{\perp}$. よって ii)が示された. iii)は ii)で$\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{X}^{\perp}$, $\boldsymbol{Y}^{\perp}$をそれぞれ$\boldsymbol{X}^{\perp}$，$\boldsymbol{Y}^{\perp}$，$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$と書きなおし，i)を用いれば示せる.

Lesson 13 補講

この付録の目標とする範囲は Lesson 12 までで一応カバーした．しかし再考に値する項目もあり，ここではこれらを補講の対象とする．

行列の核再考

$\boldsymbol{A}$をm行n列の行列とし，$\boldsymbol{x}$をn成分の縦ベクトルとする．行列$\boldsymbol{A}$の核とは$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$を満たす$\mathbb{R}^n$の部分空間であった．式（1－4）で$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$とすれば，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$を満たす任意のベクトル$\boldsymbol{x}$，すなわち$\forall\boldsymbol{x}\in\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$は，$\boldsymbol{A}$の全ての行ベクトルと直交することを意味する．行ベクトルのすべてと直交することは，内積の線形性より行ベクトルの張る空間$\boldsymbol{V}$と直交することと同じだから，$\boldsymbol{x}$はその直交補空間$\boldsymbol{V}^{\perp}$に属する．すなわち$\boldsymbol{x}\in\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}\Rightarrow\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}^{\perp}$．逆に$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}^{\perp}$ならば$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$．すなわち$\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{V}^{\perp}\Rightarrow\boldsymbol{x}\in\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$．よって$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{V}^{\perp}$．つまり$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$は行ベクトルの張る空間$\boldsymbol{V}$の直交補空間$\boldsymbol{V}^{\perp}$である．標語的に書けば

$$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\text{の行ベクトルの張る空間の直交補空間}\subseteq\mathbb{R}^n.$$

次元定理再考

Lesson 9 の定理 5(次元定理)の導出は筆者自身が気に食わないと述べた．これはm行n列の行列$\boldsymbol{A}$において

$$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}=\ \boldsymbol{A}\text{の列ベクトルの張る空間}\subseteq\mathbb{R}^m,$$

なので，$\mathbb{R}^m$の部分空間である$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$の次元と$\mathbb{R}^n$の部分空間である$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$の次元を足して$n$であること，

$$\dim(\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A})+\dim(\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}+\ \mathrm{null}\,\boldsymbol{A}=n, \qquad (13-1)$$

のストーリーが美しくないというクレームであった．縦ベクトルの張る空間$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$で分からなければ横から見てみろというわけで，ここでは$\boldsymbol{A}$の行ベクトルに注目すると, 行ベクトルの張る空間$\boldsymbol{V}$とその直交補空間$\boldsymbol{V}^{\perp}=\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$は共に$\mathbb{R}^n$の部分空間であり, 補空間の性質より$\boldsymbol{V}\dot{+}\boldsymbol{V}^{\perp}=\mathbb{R}^n$かつ$\dim\boldsymbol{V}+\dim\boldsymbol{V}^{\perp}=n$が成り立つ．一方，行ベクトルのうちで線形独立なものの最大個数も階数$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$だから，$\dim\boldsymbol{V}=\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$．そして$\dim\boldsymbol{V}^{\perp}=\dim(\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A})=\ \mathrm{null}\,\boldsymbol{A}$．これが次元定理$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}+\mathrm{null}\,\boldsymbol{A}=n$の素直な導出である．その上で Lesson 8 の定理 4 が保証する行列の階数の二つの定義の同等性(行列の階数＝線形独立な列ベクトルの最大

個空＝線形独立な行ベクトルの最大個数)，すなわち$\dim(\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}) = \dim \boldsymbol{V} = \mathrm{rank}\,\boldsymbol{A}$を使えば，式(13－1)が導かれるのである．この自然なストーリーなら素直に領けるはずだ．結局，初めに$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$を使うから次元定理がイメージしにくくなってしまったのだ．

<u>連立一次方程式再考</u>

Lesson 9 の定理 6 だけで済ませる線形代数の教科書もあるが，これでは応用の際の使い勝手が悪い．

$\boldsymbol{A}$の列ベクトルの張る空間$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$は，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$の行ベクトルの張る空間$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$と言いかえられる．すなわち$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$．$\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$は$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$の直交補空間で，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}) = (\boldsymbol{V}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\perp})^{\perp}$だから，$\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A} = (\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\perp}$．つまり連立方程式が解を持つ必要十分条件$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}$は，$\boldsymbol{b} \in (\mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\perp}$，すなわち$\boldsymbol{b}$が$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$の解空間と直交することと言いかえられる．標語的に書けば

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}\text{が解を持つ} \Leftrightarrow \boldsymbol{b} \perp \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

このことを書いてある線形代数の入門的な教科書(一回生のときに購入する教科書)は筆者の知る限りほとんどないが，数理物理の代表的な教科書であるCourant－Hilbert では線形代数の基本中の基本，つまり常識として扱われている．学ぶ側はそのギャップに驚かされる．何とかしてほしいものだ．

以上で全ての Lesson を終えることにする．

おわりの言葉

この付録では行列式も固有値も固有ベクトルすらも扱われていない．しかしだからと言って決して線形代数で落ちこぼれた人のための教材ではない．例えば部分空間の直交補空間の直交補空間が元の部分空間であるという事実はLagrange の未定乗数法を理解する上で欠かせない基礎事項である．積分方程式論における Fredholm の交代定理(Fredholm alternative)は，Courant-Hilbert では定理 6 の言い換えを出発点として導かれている．非圧縮流体の Poisson 方程式を用いない数値解法である格子 Boltzmann 法の数学的基礎はまさに定理 6 の言い換えだ．このように人には聞けない基礎の基礎でも，これらに基づく有用な理論は枚挙に暇がない．雀荘に通う人が点数計算を瞬時にできるのと同じで，線形代数の基礎の基礎を自家薬籠中の物にしておくことは，理系で飯を食う人間にとっては第一歩なのである．